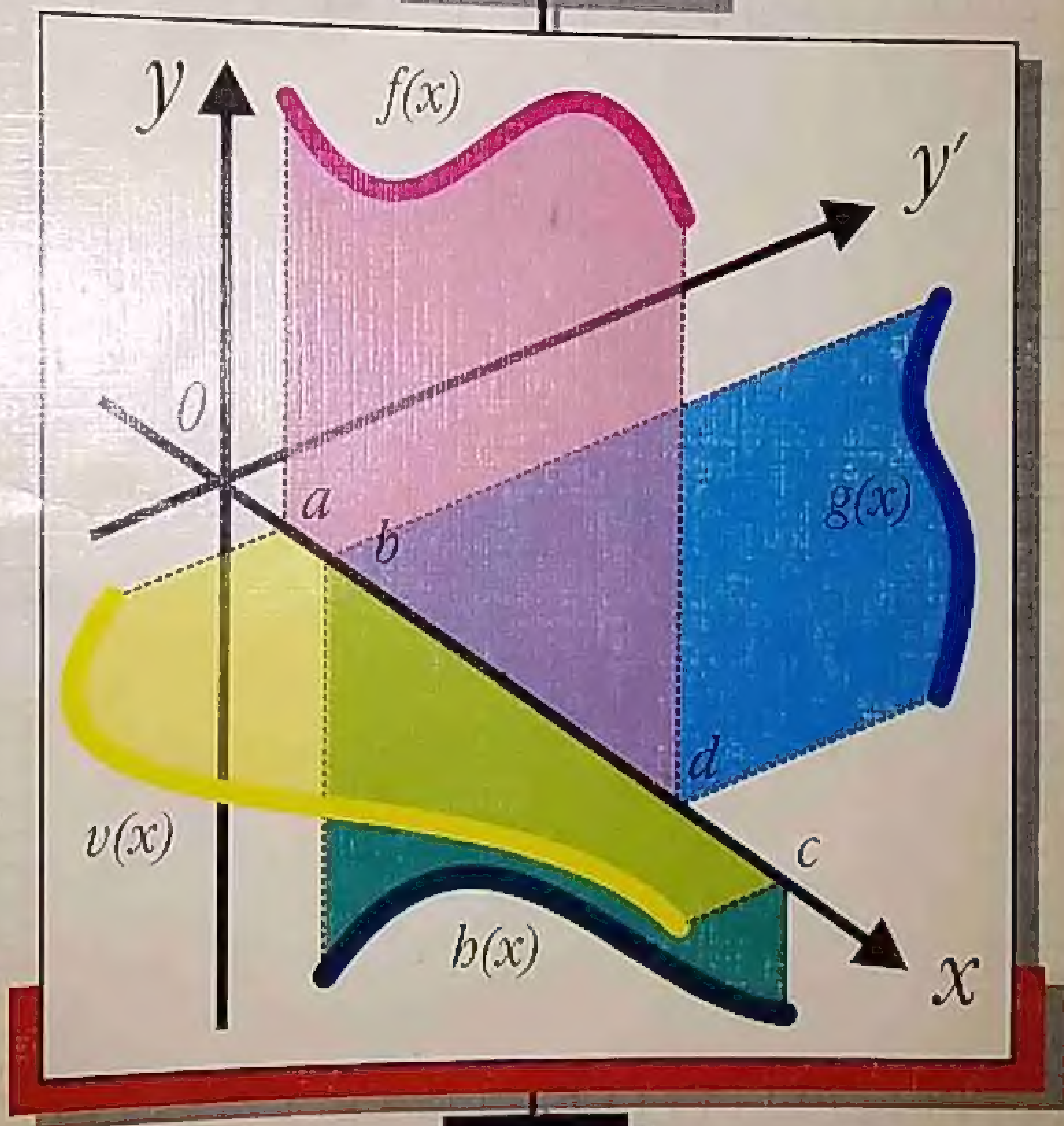
АЛГЕБРА

В ТАБЛИЦАХ

7–11 КЛАССЫ





ДРОФА

АЛГЕБРА
В ТАБЛИЦАХ

7–11

КЛАССЫ

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

АВТОРЫ-СОСТАВИТЕЛИ:
Л.И.Звавич, А.Р.Рязановский

2-е издание



Москва
Издательский дом «Дрофа»
1998

УДК 373:512(08)
ББК 22.14я2
А45

А45 **Алгебра в таблицах. 7—11 кл.:** Справочное пособие/Авт.-сост. Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский. — 2-е изд. — М.: Дрофа, 1998. — 96 с.: ил.

ISBN 5—7107—1690—1

Пособие содержит таблицы по всем наиболее важным разделам школьного курса арифметики, алгебры, начал анализа. В таблицах кратко изложена теория по каждой теме, приведены основные формулы, графики и примеры решения типовых задач. В конце книги помещен предметный указатель.

Пособие будет полезно учащимся 7—11 классов, абитуриентам, студентам, учителям и родителям.

УДК 373:512(08)
ББК 22.14я2

Учебное издание

АЛГЕБРА В ТАБЛИЦАХ

7—11 классы

Справочное пособие

Авторы-составители:

Звавич Леонид Исаакович
Рязановский Андрей Рафаилович

Ответственный редактор *М. Г. Циновская*
Оформление *А. В. Кузнецов*
Компьютерная верстка *О. А. Молочков, С. А. Белых*
Технический редактор *Н. И. Герасимова*
Корректор *Г. И. Мосякина*

Изд. лиц. № 061622 от 7.10.97.
Подписано к печати 03.11.97. Формат 84×108 $^1/_{32}$. Бумага офсетная.
Гарнитура «Школьная». Печать высокая. Усл. печ. л. 5,04.
Тираж 30 000 экз. Заказ № 464.

Издательский дом «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

По вопросам приобретения продукции Издательского дома «Дрофа» обращаться по адресу: 127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (095) 289-03-66, 289-03-25, 218-16-37, 218-54-09.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ГМП «Первая Образцовая типография» Государственного комитета РФ по печати.
113054, Москва, Валовая, 28.

ISBN 5—7107—1690—1

От авторов

Тематические таблицы по всем наиболее важным разделам школьного курса арифметики, алгебры, начал анализа предназначены для школьников от седьмого до одиннадцатого классов. В каждой таблице кратко изложена теория конкретного вопроса (определения, теоремы, следствия, формулы); приводятся рисунки, графики, а также примеры решения наиболее принципиальных задач.

Таблицы помогут систематизировать знания, быстро и полно повторить основные моменты той или иной темы, с помощью предметного указателя найти нужные сведения. Таблицы можно разрезать и наклеить на плотную бумагу, оставив оборот чистым для пометок и добавлений (для такой операции надо иметь два экземпляра книги).

Ученик может:

— при подготовке к ответу или к контрольной работе прочитать и обдумать соответствующую таблицу, посмотреть предметный указатель;
— при решении задач по данной теме использовать соответствующую таблицу в качестве справочника;
— после уроков по данной теме самому внести в таблицу (на чистый оборот) добавления и изменения, отметить неизученные в классе вопросы;
— при итоговом повторении материала прежде всего просмотреть таблицы;
— устроить себе или своему товарищу зачет по таблице или предметному указателю;
— использовать таблицу как план ответа на устном экзамене или зачете.

Учитель может:

— использовать таблицы при подготовке к уроку;
— при объяснении нового материала подавать таблицы через кодоскоп (вывешивать на доске увеличенную таблицу), а еще лучше — положить книгу перед каждым учеником;
— проводить письменный или устный опрос по материалам таблиц или предметного указателя;
— использовать таблицы во время проведения самостоятельных работ;
— проводить по таблицам комплексное или тематическое повторение;
— избавить себя от утомительной процедуры «надиктовывания» аналогичных таблиц, план-конспектов, формул и т.п.

Абитуриент может: внимательно прочитав каждую таблицу «от корки до корки», уяснить, всем ли материалом он владеет в должной мере; при недостатке времени таблицы могут быть основным источником тематического повторения при подготовке к письменному экзамену. Если вас ждет и устный экзамен, то материал таблиц должен быть вашим лоцманом при чтении учебников.

Родители ученика могут использовать таблицу:

— для проверки знаний своего ребенка по той или иной теме;
— для проверки своих собственных знаний по школьной математике и для их расширения.

Таблицы могут быть использованы также будущими учителями, репетиторами, членами предметных комиссий институтов, студентами.

Авторы надеются, что таблицы принесут пользу всем, кто будет использовать их в своих занятиях по математике.

Авторы выражают благодарность Борису Петровичу Пигареву, внимательно прочитавшему таблицы и сделавшему ряд ценных замечаний.

Таблица 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Множество натуральных чисел

N	Натуральные числа 1; 2; 3...

Множество целых чисел

Z	N	Целые числа состоят из натуральных, нуля и чисел, противоположных натуральным. $N \subset Z$
	0	
	N_-	

Множество рациональных чисел

Q	Z	Рациональные числа представимы как $\frac{p}{q}$, где p — целое, а q — натуральное. $N \subset Z \subset Q$
	Дроби	

Множество действительных чисел

R	Q	Действительные числа — это бесконечные десятичные дроби. $N \subset Z \subset Q \subset R$ Рациональные числа — бесконечные периодические дроби. Период не может состоять из одних девяток. Если период состоит из одних нулей, дробь может считаться конечной десятичной дробью.
	$\overline{Q}$	*Множество иррациональных чисел.* Иррациональные числа — бесконечные непериодические десятичные дроби. $Q \cup \overline{Q} = R$

$3 \in N$, $3 \in Z$, $-6 \notin N$, $-6 \in Z$, $0{,}25 \notin N$, $0{,}25 \notin Z$, $0{,}25 \in Q$, $0{,}25 \in R$.

Делимость целых неотрицательных чисел

Число a делится на число b, если существует c, такое, что $a = bc$.

$a \vdots b$; *b — делитель a; a — кратное b.*

Таблица 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Свойства делимости

Ноль делится на любое натуральное число. = 0
Любое число делится на единицу.
Любое число делится само на себя. = 1

Если $a > 0$ и $a \vdots b$, то $a \geqslant b$.
Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.
Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a + b) \vdots c$.
Если $a \vdots (bc)$, то $a \vdots b$, $a \vdots c$ и $(a : b) \vdots c$.

Если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то $a = b$.
Если $a \vdots b$ и $k \neq 0$, то $ak \vdots bk$.
Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(am + bn) \vdots c$.
Если $a \vdots c$ и $(a + b) \vdots c$, то $b \vdots c$.

Деление с остатком

Для любых двух натуральных чисел a и b найдутся такие целые неотрицательные q и r, что $a = b \cdot q + r$, $0 \leqslant r < b$.
Если $r = 0$, то $a \vdots b$. Число r называется *остатком* от деления a на b.

Признаки делимости

Число делится на два, если его последняя цифра делится на два.	**на 2**
Число делится на пять, если его последняя цифра делится на пять.	**на 5**
Число делится на четыре, если число, составленное из двух его последних цифр, делится на четыре.	**на 4**
Число делится на двадцать пять, если число, составленное из двух его последних цифр, делится на двадцать пять.	**на 25**
Число делится на три, если сумма его цифр делится на три.	**на 3**
Число делится на девять, если сумма его цифр делится на девять.	**на 9**
Число делится на одиннадцать, если алгебраическая сумма его цифр $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1}$ делится на одиннадцать.	**на 11**

Десятичная запись n-значного натурального числа:

$\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0} =$

$= a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0;$

a_i — цифры числа, $a_{n-1} \neq 0$, $n \in N$.

НОК $(a; b)$	Наименьшее положительное из общих кратных чисел a и b называется *наименьшим общим кратным* этих чисел. НОК (15; 10) = 30
НОД $(a; b)$	Наибольший из общих делителей чисел a и b называется *наибольшим общим делителем* этих чисел. НОД (15; 10) = 5

НОК $(a; b)$ · НОД $(a; b) = a \cdot b$

Числа a и b называются *взаимно простыми*, если НОД $(a; b) = 1$.

Натуральное число p называется *простым*, если оно имеет ровно два различных делителя (единицу и само это число).

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23... — простые числа

Свойства простых чисел

Любое натуральное число либо делится на простое, либо взаимно просто с ним.

Произведение натуральных чисел делится на простое число тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них делится на это простое число.

Простых чисел бесконечно много (нет самого большого простого числа).

Если натуральное число не делится ни на одно простое, квадрат которого не превосходит это натуральное число, то оно само простое.

Любое простое число p $(p > 3)$ представимо в виде $p = 6k \pm 1$, $k \in N$.

Каноническое разложение натурального числа n $(n > 1)$:

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где p_i — простое, $p_i < p_{i+1}$ и $0 < \alpha_i \in N$.

$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

Таблица 2. МОДУЛЬ

$$|a| = \left[\begin{array}{ll} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{array}\right.$$

Основные свойства модуля	**Геометрическая интерпретация модуля**
$\lvert a\rvert \geqslant 0 \quad \lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$ $\lvert a-b\rvert = \lvert b-a\rvert$ $\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \leqslant \lvert a \pm b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	Если точка A на числовой оси имеет координату a, то расстояние от A до 0 равно $\lvert a\rvert$.

Расстояние между точками A (a) и B (b) на прямой равно $|a-b|$.

Уравнения с модулем

$\lvert x\rvert = a$	$\lvert x-b\rvert = a$	$\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert$	$\lvert f(x)\rvert = g(x)$
$a < 0$ решений нет	$a < 0$ решений нет	равносильно объединению уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$	равносильно системе уравнений $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \\ g(x) \geqslant 0 \end{array}\right.$
$a = 0 \; x = 0$	$a = 0 \; x = b$		
$a > 0$ $\left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -a \end{array}\right.$	$a > 0$ $\left[\begin{array}{l} x = b - a \\ x = b + a \end{array}\right.$		

Неравенства с модулем

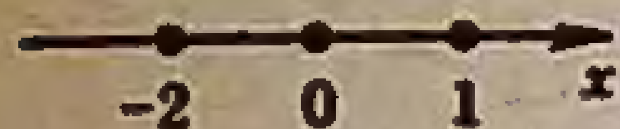
$\lvert x-b\rvert < a$	$\lvert x-b\rvert \geqslant a$	$\lvert f(x)\rvert < g(x)$	$\lvert f(x)\rvert > g(x)$
$a \leqslant 0$ решений нет	$a \leqslant 0$ $x \in R$	равносильно системе: $\left\{\begin{array}{l} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{array}\right.$	равносильно объединению: $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$
$a > 0$ $b - a < x <$ $< b + a$	$a > 0$ $x \leqslant b - a$ или $x \geqslant b + a$		

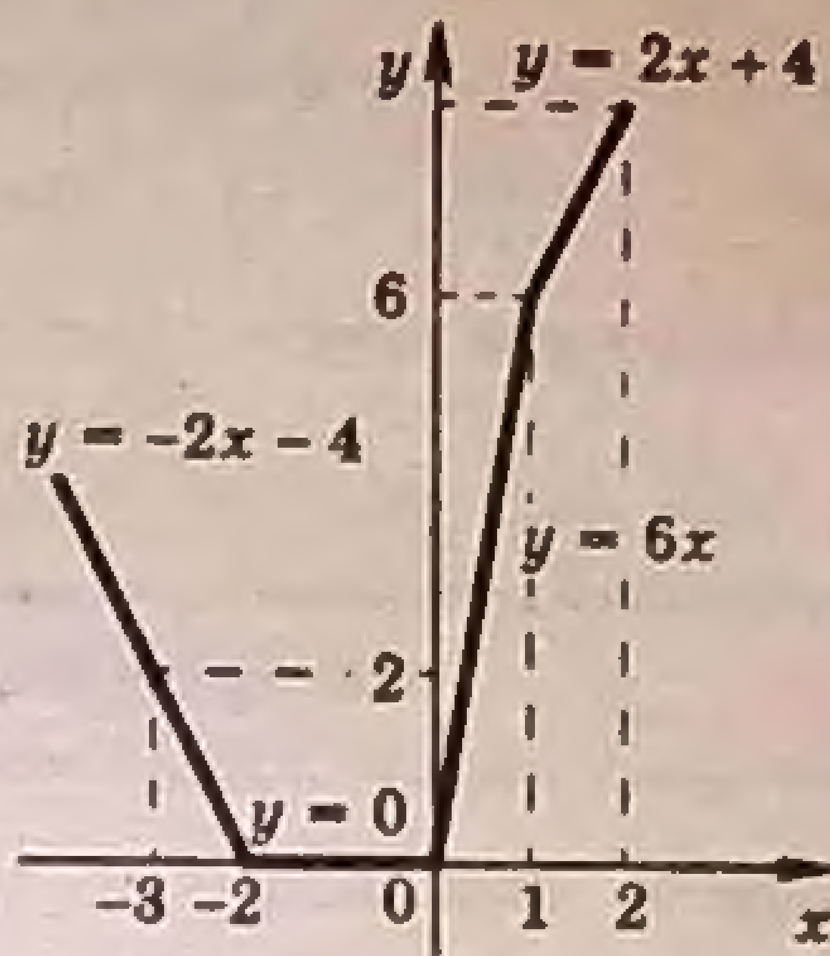
Неравенство $|f(x)| > |g(x)|$ равносильно неравенству $f^2(x) > g^2(x)$ или неравенству $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$.

Примеры

Раскрытие модулей «по промежуткам»

$y = |x + 2| + 3\,|x| - 2\,|x - 1|$





$x \leqslant -2,\ y = -(x + 2) - 3x + 2\,(x - 1) = -2x - 4$

$-2 < x \leqslant 0,\ y = x + 2 - 3x + 2\,(x - 1) = 0$

$0 < x \leqslant 1,\ y = x + 2 + 3x + 2\,(x - 1) = 6x$

$x > 1,\ y = x + 2 + 3x - 2\,(x - 1) = 2x + 4$

Решить уравнение $3x^2 - 5|x| - 8 = 0$.

Заметим, что $|x|^2 = x^2$; введем обозначение $|x| = t$.

$3t^2 - 5t - 8 = 0.$

$t_1 = -1;\ t_2 = \frac{8}{3}.$

$|x| = -1$, **решений нет.**

$|x| = \frac{8}{3};\ x_1 = -\frac{8}{3},\ x_2 = \frac{8}{3}.$

Ответ: $x_1 = -\frac{8}{3};\ x_2 = \frac{8}{3}.$

Построить график функции $y = \operatorname{tg} x \cdot |\cos x|$.

Данная функция периодическая, период $T = 2\pi$.

Построим график на каждом промежутке знакопостоянства косинуса.

При $\cos x > 0\quad x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right),\ y = \sin x;$

при $\cos x < 0\quad x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right),\ y = -\sin x.$

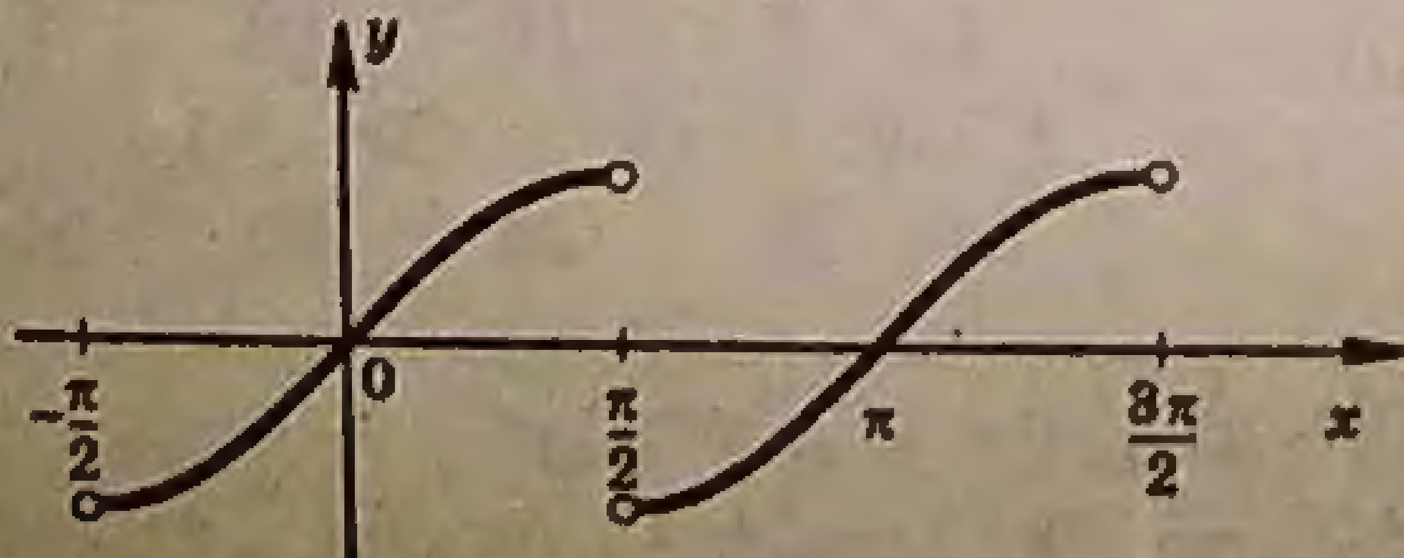


Таблица 3. ДЕЙСТВИЯ С МНОГОЧЛЕНАМИ

Сложение многочленов: $(a^2 + ab - b) + (3a^2 - 2ab + b) = 4a^2 - ab.$

Вычитание многочленов:

$(2a - b) - (3a + b) = (2a - b) + (-3a - b) = -a - 2b.$

Умножение многочленов:

$(a + 3b)(a - b) = a^2 - ab + 3ab - 3b^2 = a^2 + 2ab - 3b^2.$

Формулы сокращенного умножения

квадрат суммы	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
квадрат разности	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
куб суммы	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
куб разности	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
разность кубов	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Бином Ньютона: $(a + b)^n =$

$$= a^n + C_n^1\, a^{n-1} b + C_n^2\, a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k\, a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$$

$$C_n^1 = n;\quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2};\quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\;k!};\quad C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$n \in N,\ n > 1\quad (0! = 1;\ 1! = 1;\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n).$$

Треугольник Паскаля

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a - b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$

Таблица 3. ДЕЙСТВИЯ С МНОГОЧЛЕНАМИ

Основные приемы разложения многочлена на множители

Вынесение общего множителя за скобку	$2ab + 14a^2 + 2a = 2a(b + 7a + 1)$; $3a^2b^3 - 15a^3b = 3a^2b(b^2 - 5a)$.
Метод группировки	$ab + ac - b - c = a(b + c) - (b + c) = (b + c)(a - 1)$.
Использование формул сокращенного умножения	$a^2 + 4ab + 4b^2 = (a + 2b)^2$; $a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$.
Дополнительные формулы	$(a^n - 1) = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$; $(a^{2m+1} + 1) = (a + 1)(a^{2m} - a^{2m-1} + \ldots - a + 1)$.

Многочлены от одной переменной

Общий вид: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0$,
n — степень многочлена, a_i — коэффициенты, a_n — старший коэффициент, $a_n \neq 0$.

Если $a_n = 1$, то многочлен называется *приведенным*.

$3x^4 - x^3 + 2x^2 - 5$ — многочлен 4-й степени с коэффициентами: $a_4 = 3$; $a_3 = -1$; $a_2 = 2$; $a_1 = 0$; $a_0 = -5$.

Квадратный трехчлен — многочлен второй степени

$$ax^2 + bx + c \ (a \neq 0),$$

a — первый коэффициент, b — второй коэффициент, c — свободный член.

Деление многочленов

Теорема о делении с остатком $P(x) = M(x) \cdot Q(x) + R(x)$, где $P(x)$ — делимое, $M(x)$ — делитель, $Q(x)$ — частное, $R(x)$ — остаток. Если остаток не равен нулю, то его степень меньше степени делителя. $\underbrace{3x^3 - x^2 - 3x - 2}_{P(x)} = \underbrace{(x^2 + x - 1)}_{M(x)}\underbrace{(3x - 4)}_{Q(x)} + \underbrace{(4x - 6)}_{R(x)}$	*Деление «уголком»* $3x^3 - x^2 - 3x - 2 \ \vert\ x^2 + x - 1$; $-(3x^3 + 3x^2 - 3x)$ → $3x - 4$; $-4x^2 - 2$; $-(-4x^2 - 4x + 4)$; $4x - 6$. $P(x) = 3x^3 - x^2 - 3x - 2$, $M(x) = x^2 + x - 1$, $Q(x) = 3x - 4$, $R(x) = 4x - 6$

Деление многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$

Теорема Безу.

Остаток от деления многочлена на двучлен $x - a$ равен значению этого многочлена при $x = a$, т. е. $R = f(a)$.

$$f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + f(a)$$

Схема Горнера.

Разделить многочлен $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3$ на $(x - 5)$

$a = 5$

$b_2 = a_3$

$b_1 = b_2 \cdot 5 + a_2$

$b_0 = b_1 \cdot 5 + a_1$

$R = b_0 \cdot 5 + a_0$

$R = f\,(5) = 247$

	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	5	0	–3
5	1	10	50	247
	b_2	b_1	b_0	R

Корнем многочлена называется такое число x_0, при котором значение многочлена равно нулю ($f\,(x_0) = 0$).

Целые корни многочлена с целыми коэффициентами являются делителями его свободного члена.

Пример.

$x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$

Целые корни можно искать только среди чисел –1; 1; 2; –2; 4; –4; 8; –8.

Ответ: $x = 1$; $x = -2$; $x = -4$ — корни.

Таблица 4. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

Определение арифметического корня $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ b^2 = a \end{cases}$	$\sqrt{16}=4$, т.к. $4>0$, $4^2=16$; $\sqrt{25}\neq 7$, т.к. $7^2 \neq 25$; $\sqrt{25}\neq -5$, т.к. $-5<0$; $\sqrt{-8}$ не определен.	$\sqrt{0,36}=0,6$; $\sqrt{4900}=70$; $\sqrt{0,0001}=0,01$; $2<\sqrt{8}<3$; $0,8<\sqrt{0,8}<0,9$.

Тождества	Основные свойства	
$(\sqrt{a})^2=a,\ a\geqslant 0$	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$	$\sqrt{ab}=\sqrt{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt{\lvert b\rvert}$
$\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert,\ a\in R$	$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$	$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{\lvert a\rvert}}{\sqrt{\lvert b\rvert}}$
	$(\sqrt{a})^p=\sqrt{a^p}$	$\sqrt{a^p}=(\sqrt{\lvert a\rvert})^p$

Сравнения, связанные с квадратными корнями

Если $a>b\geqslant 0$, то $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqslant\sqrt{a+b}$.

Если $a>1$, то $a>\sqrt{a}$ и $\sqrt{a}>1$.

Если $0<a<1$, то $a<\sqrt{a}$ и $0<\sqrt{a}<1$.

Вынесение из-под корня	Внесение под корень
$\sqrt{a^2\cdot b}=\lvert a\rvert\cdot\sqrt{b},\ b\geqslant 0$	$a\sqrt{b}=\begin{cases} -\sqrt{a^2 b}, \text{ если } a<0, \\ \sqrt{a^2 b}, \text{ если } a\geqslant 0 \end{cases}$ $b\geqslant 0$
$\sqrt{63}=\sqrt{9\cdot 7}=3\sqrt{7}$; $\sqrt{7a^2}=\lvert a\rvert\cdot\sqrt{7}$; $\sqrt{5b^2}+\sqrt{b}=b\sqrt{5}+\sqrt{b}$; $\sqrt{3c^2}+\sqrt{-c}=-c\sqrt{3}+\sqrt{-c}$.	$5\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3\cdot 5^2}=\sqrt{75}$; $-2\sqrt{7}=-\sqrt{28}$; $(\sqrt{5}-2)\cdot\sqrt{9+4\sqrt{5}}=$ $=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2\cdot(9+4\sqrt{5})}=1$; $(\sqrt{3}-2)\cdot\sqrt{7+4\sqrt{3}}=$ $=-\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2\cdot(7+4\sqrt{3})}=-1$.

Иррациональность в знаменателе

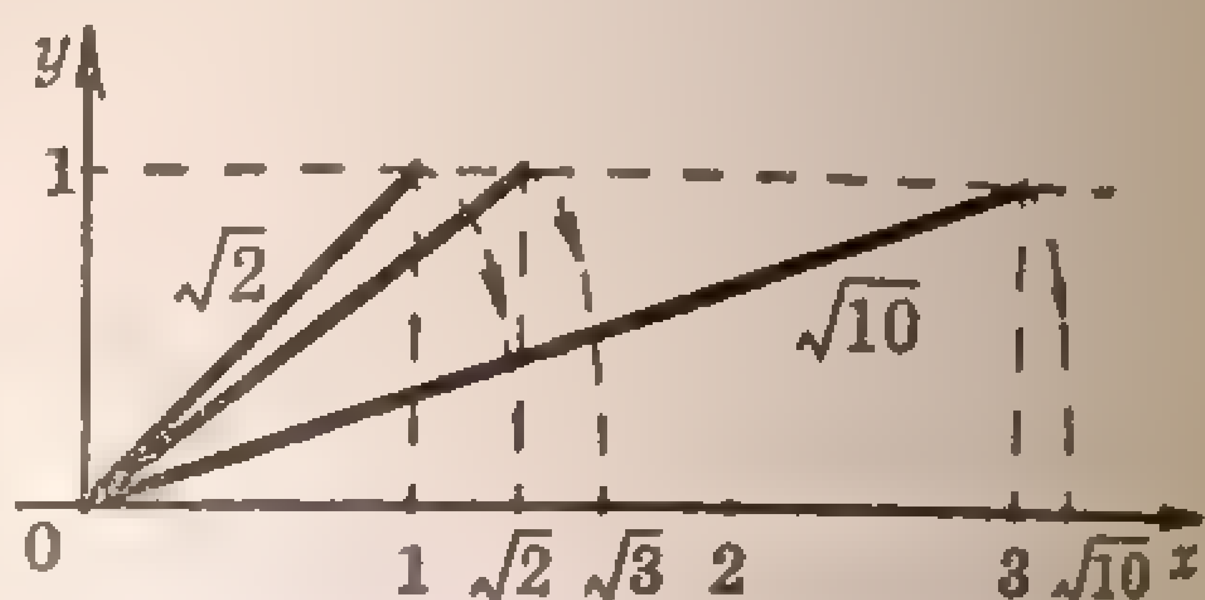
$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-1} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

Сравнение среднего геометрического (пропорционального) двух чисел и их среднего арифметического

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},\ a \geqslant 0;\ b \geqslant 0.$$

Построение $\sqrt{n}$ $(n \in N)$ на числовой прямой



$$(\sqrt{n+1})^2 = (\sqrt{n})^2 + 1^2$$

Примеры

Найти x^2 и упростить выражение $x = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Заметим, что $x < 0$, т. к. $3 - 2\sqrt{2} < 3 + 2\sqrt{2}$.

$x^2 = 3 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{9-8} + 3 + 2\sqrt{2} = 6 - 2 = 4.$

Значит, $x = -2$.

Ответ: $x^2 = 4$; $\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}} = -2$.

Сравнить числа $\sqrt{2} + 1$ и $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$.

Запишем:

$$\sqrt{2} + 1 \quad ? \quad \frac{\sqrt{33}-1}{2}$$

$$2\sqrt{2} + 2 \quad ? \quad \sqrt{33} - 1$$

$$\sqrt{8} + 3 \quad ? \quad \sqrt{33}$$

Так как сравниваемые числа положительны, то можно сравнить их квадраты:

$$17 + 6\sqrt{8} \quad ? \quad 33$$

$$6\sqrt{8} \quad ? \quad 16$$

$$\sqrt{288} \quad > \quad \sqrt{256}$$

Следовательно, $\sqrt{2} + 1 > \frac{\sqrt{33}-1}{2}$.

Таблица 5. КОРНИ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

Определение арифметического корня натуральной степени из неотрицательного числа a $\left.\begin{matrix}\sqrt[n]{a}=b\\ n\in N,\ a\geqslant 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \begin{matrix}b\geqslant 0\\ b^n=a\end{matrix}$	$\sqrt[3]{27}=3$; $\sqrt[7]{0,0000001}=0{,}1$; $\sqrt[5]{1024}=4$; $2<\sqrt[3]{9}<3$; $\sqrt[1]{3}=3$; $0{,}2<\sqrt[5]{0,00036}<0{,}3$. $\sqrt[3]{0,008}=0{,}2$;
Извлечение корня нечетной степени из отрицательного числа	Если $a<0$, то $\sqrt[2n-1]{a}=-\sqrt[2n-1]{-a}$. $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$; $\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3$; $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3}=-\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}=$ $=-(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}-2$.

Корень четной степени из отрицательного числа не определен.

Тождества	Основные свойства
Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то $(\sqrt[n]{a})^n=a$. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=\lvert a\rvert,\ a\in R$ $\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}}=a,\ a\in R$	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$; $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; $(\sqrt[n]{a})^p=\sqrt[n]{a^p}$; $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$; $\boxed{\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}}$.

Сравнения, связанные с корнями	Если $a>b\geqslant 0$, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$. $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\geqslant\sqrt[n]{a+b}$. Если $a>1$, то $\sqrt[n]{a}>1$ и $\sqrt[n]{a}<a$. Если $0<a<1$, то $0<\sqrt[n]{a}<1$ и $\sqrt[n]{a}>a$.
Вынесение из-под корня	$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3\cdot 8}=2\cdot\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4\cdot 5}=(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3\cdot 6}=(1-\sqrt{2})\cdot\sqrt[3]{6}$.

Таблица 5. КОРНИ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

Внесение под корень	$3 \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{162}$; $-2 \cdot \sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{2^6 \cdot 3} = -\sqrt[6]{192}$; $(1 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{(1 - \sqrt{3})^4 \cdot 2}$; $(1 - \sqrt{5}) \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(1 - \sqrt{5})^3 \cdot 2}$.
Иррациональность в знаменателе	$\frac{3}{\sqrt[4]{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{2^3}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{8}}{2}$; $\frac{2}{\sqrt[3]{3} + 1} = \frac{2 \cdot (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1)}{3 - 1} =$ $= \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1$.
Действия с корнями различных показателей	$\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4}} \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{3^3}} = \sqrt[12]{\frac{3}{16}}$; $\sqrt[3]{18} : \sqrt{6} = \sqrt[6]{18^2} : \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{\frac{3^4 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 3^3}} =$ $= \sqrt[6]{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^2 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$ Сравнить $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{3}$. $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$. Так как $125 > 81$, то $\sqrt[12]{125} > \sqrt[12]{81}$ и $\sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{3}$.
Среднее геометрическое и среднее арифметическое неотрицательных чисел	$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ Равенство достигается при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Таблица 6. СТЕПЕНИ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt[n]{x}$

Степень с натуральным показателем	$a^1 = a$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, $n \in N$, $a \in R$	
Степень с целым показателем	$a^0 = 1$, $a \neq 0$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \in R$, $n \in N$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$; $(-1{,}2)^0 = 1$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$.
Степень с рациональным показателем для неотрицательного числа a	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $m \in Z$, $n \in N$ Если $m < 0$, то $a > 0$. Если $m > 0$, то $a \geqslant 0$.	$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$; $0^{\frac{3}{5}} = 0$; $25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = 125$; $(0{,}04)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$; $(-27)^{\frac{1}{3}}$ не определена.
Понятие о степени с иррациональным показателем	$3^3 < 3^\pi < 3^4$ $3^{3{,}1} < 3^\pi < 3^{3{,}2}$ $3^{3{,}14} < 3^\pi < 3^{3{,}15}$ .... ($\pi = 3{,}1415\ldots$)	$(0{,}3)^2 < (0{,}3)^{\sqrt{2}} < (0{,}3)^1$ $(0{,}3)^{1{,}5} < (0{,}3)^{\sqrt{2}} < (0{,}3)^{1{,}4}$ $(0{,}3)^{1{,}42} < (0{,}3)^{\sqrt{2}} < (0{,}3)^{1{,}41}$ .... ($\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$)
Степень с действительным показателем	a^r, $r \in R$ $\quad \begin{cases} r < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} r > 0 \\ a \geqslant 0 \end{cases}$	
Свойства степеней	$a^p \cdot a^r = a^{p+r}$ $a^p : a^r = a^{p-r}$ $a^r \cdot b^r = (ab)^r$	$(a^p)^r = a^{pr}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\frac{b}{a}\right)^r$ $a^r : b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Таблица 6. СТЕПЕНИ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Свойства степеней, связанные с неравенствами	$\left.\begin{matrix} a > b \geqslant 0 \\ r > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^r > b^r$	$\left.\begin{matrix} p > r \\ a > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^p > a^r$
	$\left.\begin{matrix} a > b > 0 \\ r < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^r < b^r$	$\left.\begin{matrix} p > r \\ 0 < a < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^p < a^r$

Графики степенной функции $y = x^r$, $r \in R$			
	$0 < p < r < 1$ $D(y) = [0; +\infty)$; $E(y) = [0; +\infty)$; возрастает на $[0; +\infty)$.	$1 < p < r$ $D(y) = [0; +\infty)$; $E(y) = [0; +\infty)$; возрастает на $[0; +\infty)$.	$p < r < 0$ $D(y) = (0; +\infty)$; $E(y) = (0; +\infty)$; убывает на $(0; +\infty)$.

$y = \sqrt{x}$ $y = x^{\frac{1}{2}}$	
$y = \sqrt[3]{x}$ $y = x^{\frac{1}{3}}$	
$y = \sqrt[2n]{x}$ $y = \sqrt[2n+1]{x}$ $n \in N$	

Таблица 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА

Линейная функция $y = ax + b$	
$D(y) = R$.	*График* — прямая $y = ax + b$ $(a > 0)$, $y = ax + b$ $(a < 0)$, $y = b$ $(a = 0)$, b, 0, x, y
При $a = 0$ $E(y) = \{b\}$ (постоянная), все точки — точки экстремума. При $a \neq 0$ $E(y) = R$.	
При $a > 0$ возрастает на R. При $a < 0$ убывает на R. Экстремумов нет.	
Функция $y = kx$ — *прямая пропорциональность* $(k > 0)$. Нечетная функция.	$y = k_1x$, $y = k_2x$, α, β, 0, x, y $k_1 = \text{tg}\,\alpha$ $\quad k_2 = \text{tg}\,\beta$

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$	
$D(y) = R$.	*Вид графика* — парабола. Координаты вершины параболы: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; $y_0 = y(x_0)$. Ось симметрии $x = x_0$. При $a < 0$ y_0 — наибольшее значение. При $a > 0$ y_0 — наименьшее значение.
При $a > 0$ убывает на $(-\infty; x_0]$ и возрастает на $[x_0; +\infty)$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ точка минимума, $y_0 = y(x_0)$ минимум. $E(y) = [y_0; +\infty)$.	
При $a < 0$ возрастает на $(-\infty; x_0]$ и убывает на $[x_0; +\infty)$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ — точка максимума, $y_0 = y(x_0)$ — максимум. $E(y) = (-\infty; y_0]$.	$y = ax^2$ (график: y, 0, x) Четная функция

	$D = b^2 - 4ac > 0$	$D = b^2 - 4ac = 0$	$D = b^2 - 4ac < 0$
	Два корня x_1 и x_2; график пересекает ось Ox в двух точках.	Один корень x_0; график касается оси Ox.	Нет корней; график лежит по одну сторону от оси Ox.
$a > 0$			
$a < 0$			

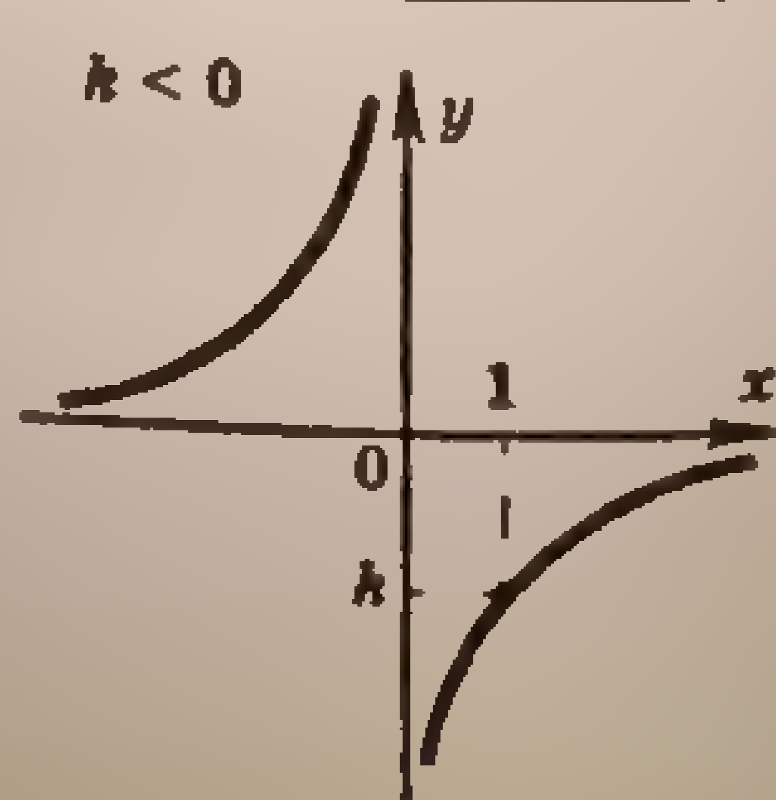
Дробно-линейная функция $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(ad - bc \neq 0)$

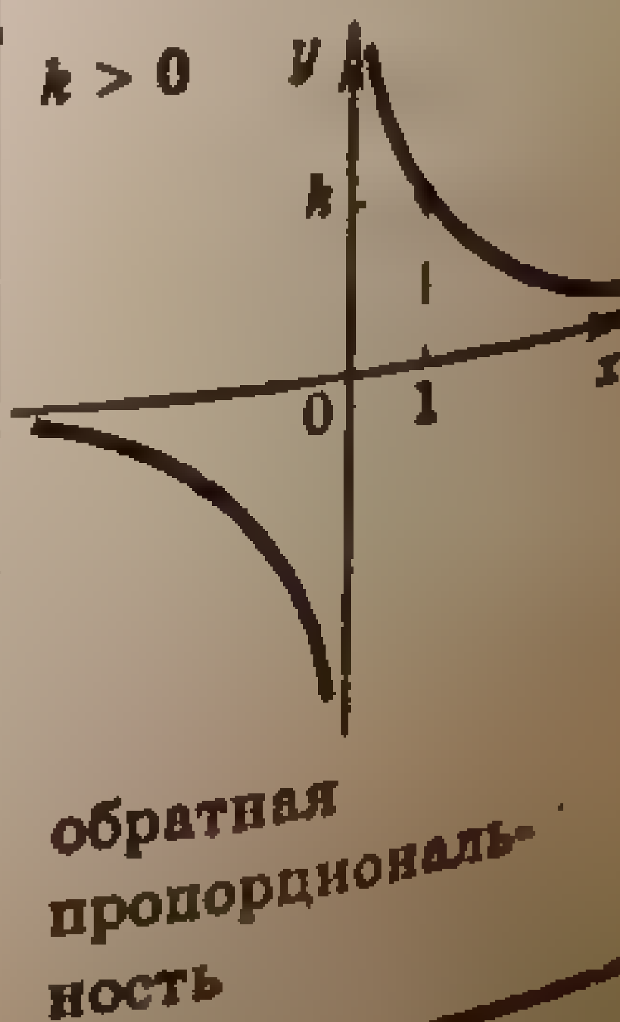
Вид графика — гипербола $y = \dfrac{k}{x}$, где $k = (bc - ad)/c^2$.

Функция $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$.

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$,
$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Два промежутка монотонности $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; при $k < 0$ функция на каждом из них возрастает, при $k > 0$ на каждом убывает.
Экстремумов нет.
Нечетная функция.

Вертикальная асимптота $x = 0$, горизонтальная $y = 0$.

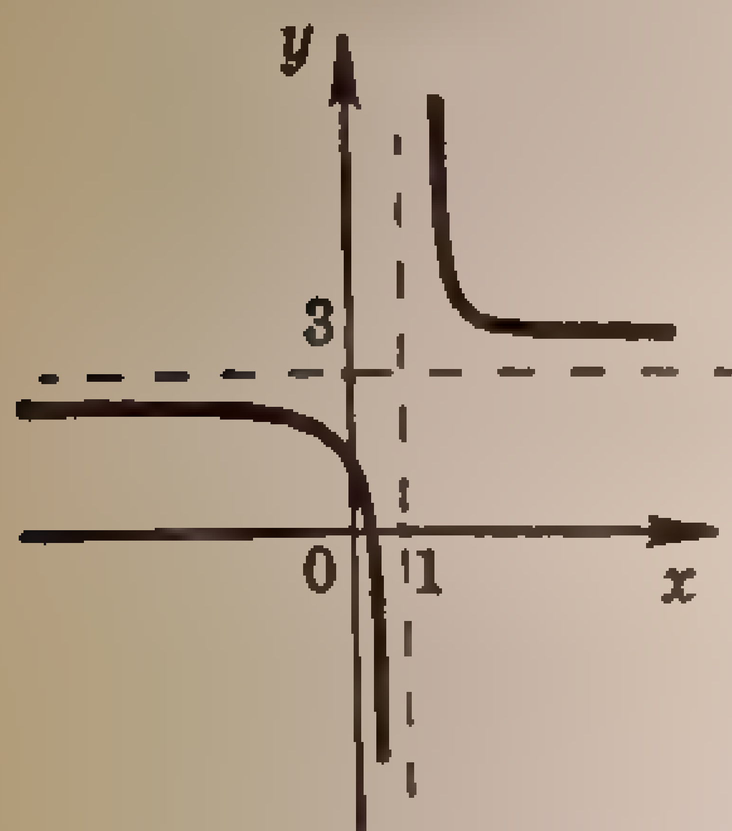
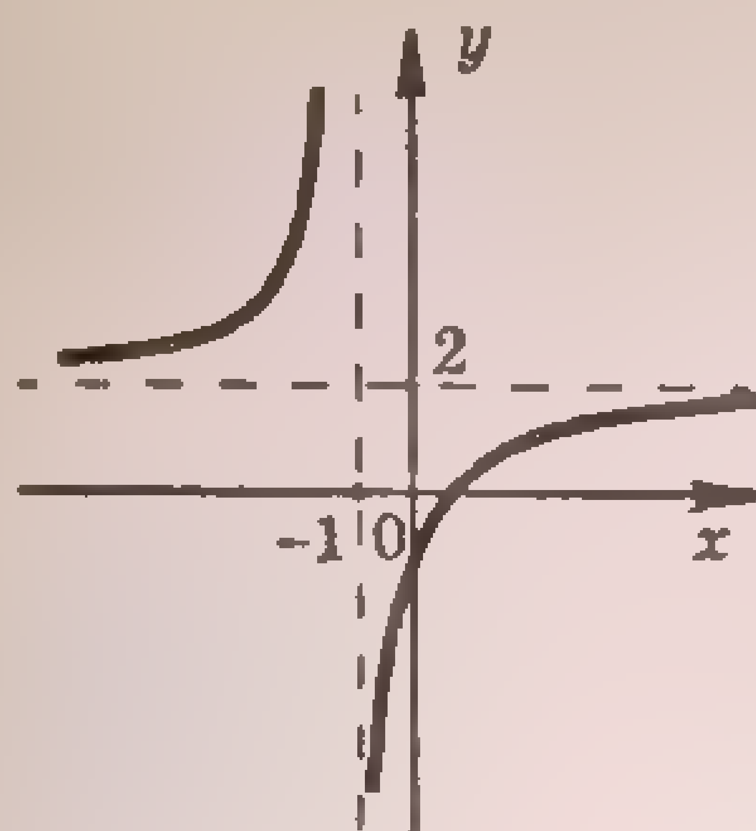
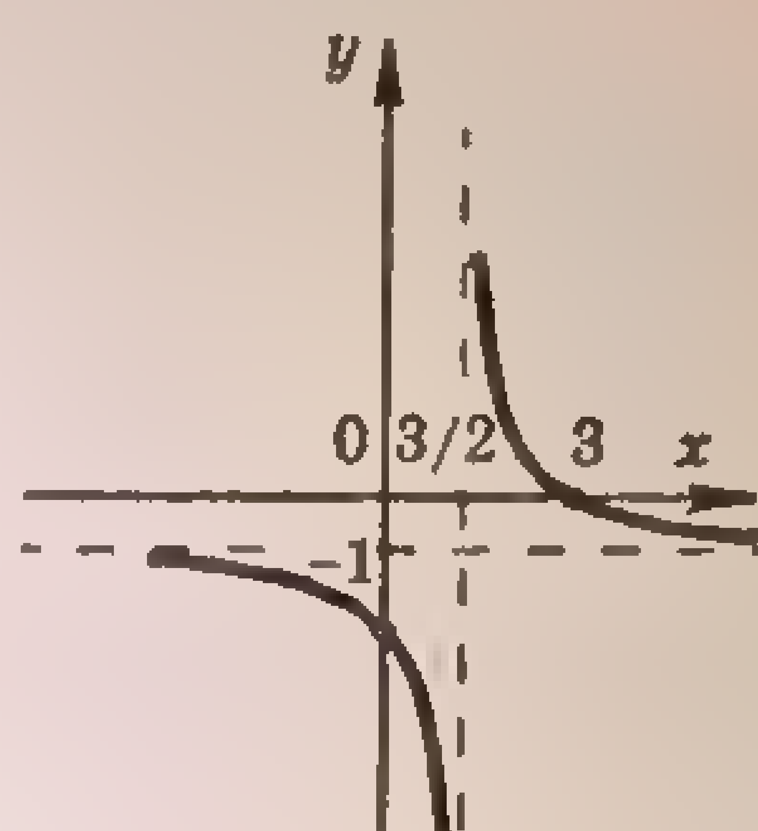




обратная пропорциональность

Таблица 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА

Примеры дробно-линейных функций

$y = \frac{3x-2}{x-1} = 3 + \frac{1}{x-1}$	$y = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$	$y = \frac{6-2x}{2x-3} = -1 + \frac{3}{2x-3}$
$x \neq 1$; $y \neq 3$; $y = \frac{1}{x}$	$x \neq -1$; $y \neq 2$; $y = -\frac{\text{[illegible]}}{x}$	$x \neq 3/2$; $y \neq -1$; $y = \frac{3/2}{x}$
		

Функция $y = \sqrt{x}$

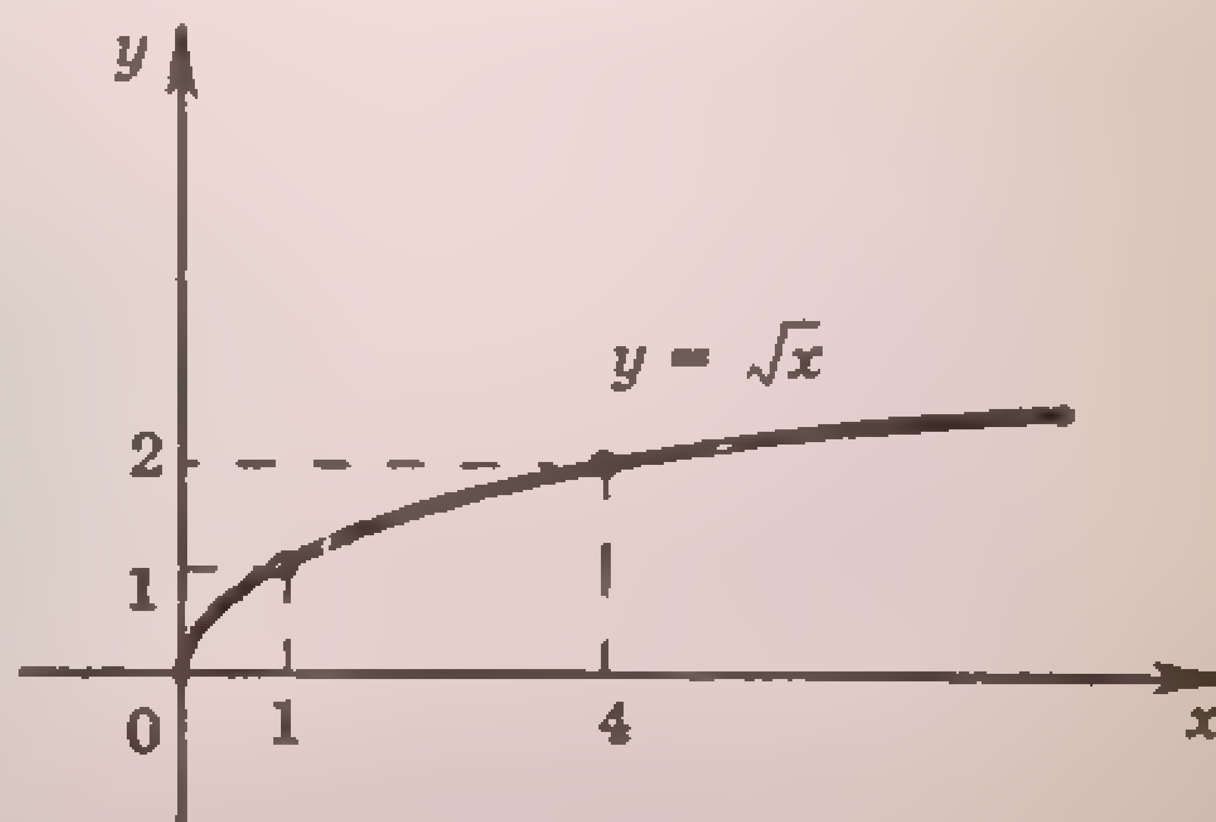
$D(y) = [0; +\infty) = E(y)$.

Возрастает на $D(y)$.

Экстремумов нет.

Четностью и нечетностью не обладает.

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.



Функция $y = \sqrt[3]{x}$

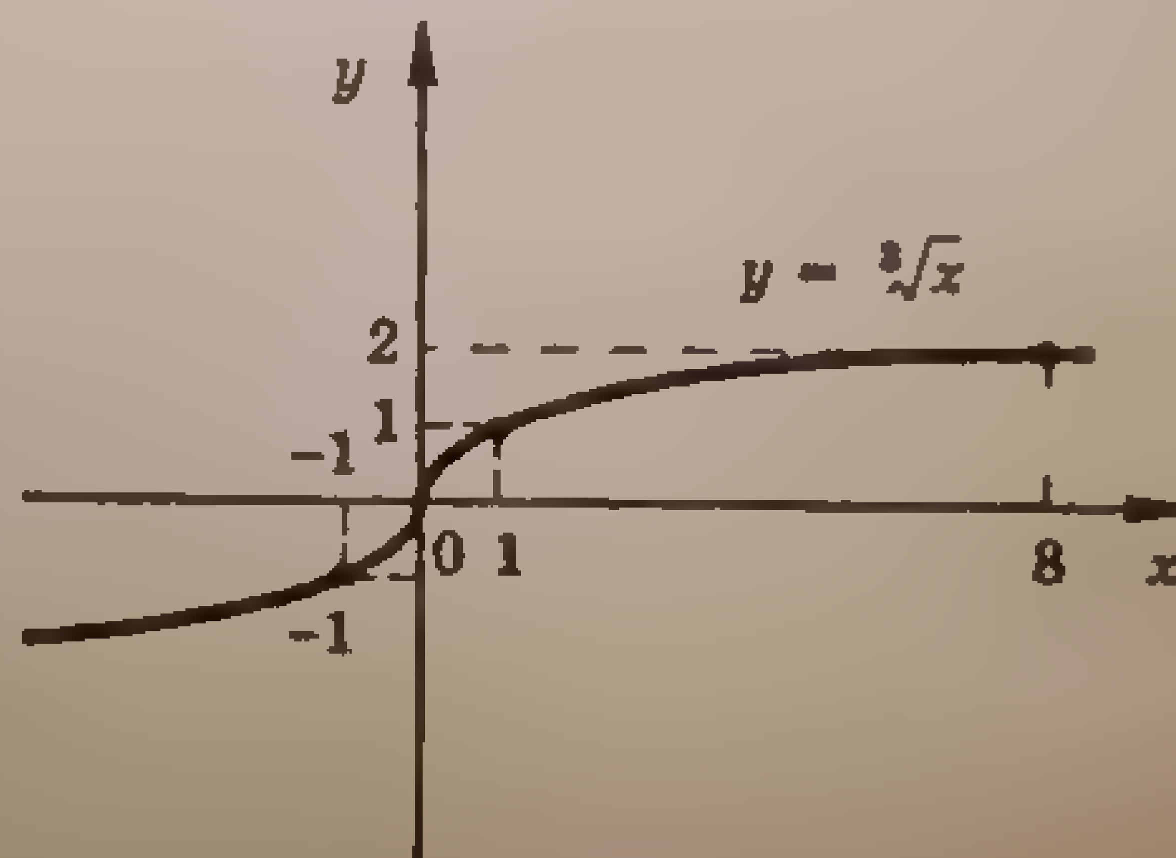
$D(y) = (-\infty; +\infty) = E(y)$.

Возрастает на $D(y)$.

Экстремумов нет.

Нечетная функция.

$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.



Степенная функция $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$n = 0$; $y = 1$; $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(y) = \{1\}$.	

$n > 0$, натуральное		**$n < 0$, целое**	
n — четное	*n — нечетное*	*n — четное*	*n — нечетное*
$D(y) = R$ $E(y) = [0; +\infty)$	$D(y) = R$ $E(y) = R$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $E(y) = (0; +\infty)$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Четная функция	Нечетная функция	Четная функция	Нечетная функция

n — не целое число		
$n > 1$	$0 < n < 1$	$n < 0$
$D(y) = [0; +\infty) = E(y)$		$D(y) = (0; +\infty) = E(y)$

Сравнение графиков степенных функций

$w < 0 < v < u < 1 < t < s$

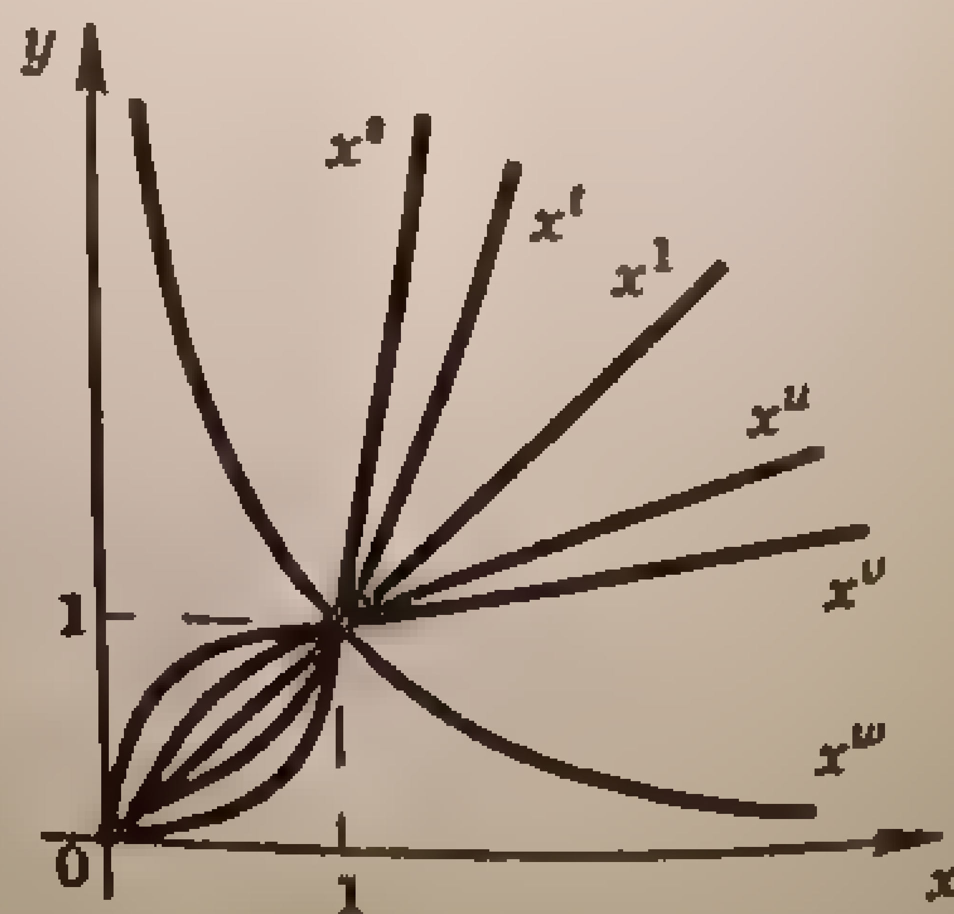


Таблица 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА

Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$ $y' = a^x \cdot \ln a$	Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$ $y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$D(y) = R$; $E(y) = (0; +\infty)$; один промежуток монотонности; экстремумов нет.	$D(y) = (0; +\infty)$; $E(y) = R$; один промежуток монотонности; экстремумов нет.
$a > 1$ возрастает на R	$a > 1$ возрастает на $D(y)$
$0 < a < 1$ убывает на R	$0 < a < 1$ убывает на $D(y)$

$e = 2{,}718281828459045... \approx 2{,}7$ — основание натурального логарифма ($\log_e x = \ln x$).

$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$d < c < 1 < a < b$	$a < b < 1 < c < d$

Таблица 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА

Тригонометрические функции

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$
$D(y)$	R	R	$(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$ $k \in Z$
$E(y)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	R
Бесконечное множество промежутков монотонности	Убывает на $[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k]$; возрастает на $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$.	Убывает на $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$; возрастает на $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$.	Возрастает на каждом промежутке непрерывности $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$.
Точки минимума	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = \pi + 2\pi k$	нет
Точки максимума	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = 2\pi k$	нет
Минимумы	-1	-1	нет
Максимумы	1	1	нет
Нули	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = \pi k$
Промежутки знакопостоянства ($y > 0$)	$(2\pi k; \pi + 2\pi k)$	$(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$	$(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$
Промежутки знакопостоянства ($y < 0$)	$(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$	$(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$	$(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k)$
Период	2π	2π	π
Четность	Нечетная $\sin(-x) = -\sin x$	Четная $\cos(-x) = \cos x$	Нечетная $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
Асимптоты	нет	нет	Вертикальные $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
Производная	$\cos x$	$-\sin x$	$1/\cos^2 x$

Таблица 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \text{tg}\, x$
Графики			

Обратные тригонометрические функции

	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \text{arctg}\, x$
$D(y)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	R
$E(y)$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	$[0; \pi]$	$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
Монотонность	Возрастает на $D(y)$	Убывает на $D(y)$	Возрастает на $D(y)$
Четность	Нечетная	—	Нечетная
Производная	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \neq \pm 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \neq \pm 1)$	$\frac{1}{1+x^2}$
Графики			

Таблица 8. ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

$f(x+a)$	Перенос графика $y=f(x)$ на вектор $\bar{p}(-a;\ 0)$.	$y=\sqrt{x+2}$; $y=\sqrt{x}$; $\bar{p}(-2;\ 0)$
$f(x)+b$	Перенос графика $y=f(x)$ на вектор $\bar{p}(0;\ b)$.	$y=\sqrt{x}$; $y=\sqrt{x}-1$; $\bar{p}(0;\ -1)$
$-f(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс.	$y=\sqrt{x}$; $y=-\sqrt{x}$
$f(-x)$	Симметрия относительно оси ординат.	$y=\sqrt{-x}$; $y=\sqrt{x}$
$\lvert f(x)\rvert$	Часть графика в верхней полуплоскости и на оси абсцисс без изменения, а вместо части графика в нижней полуплоскости строим симметричную ей относительно оси Ox.	$y=\lvert x^2-1\rvert$; $y=x^2-1$

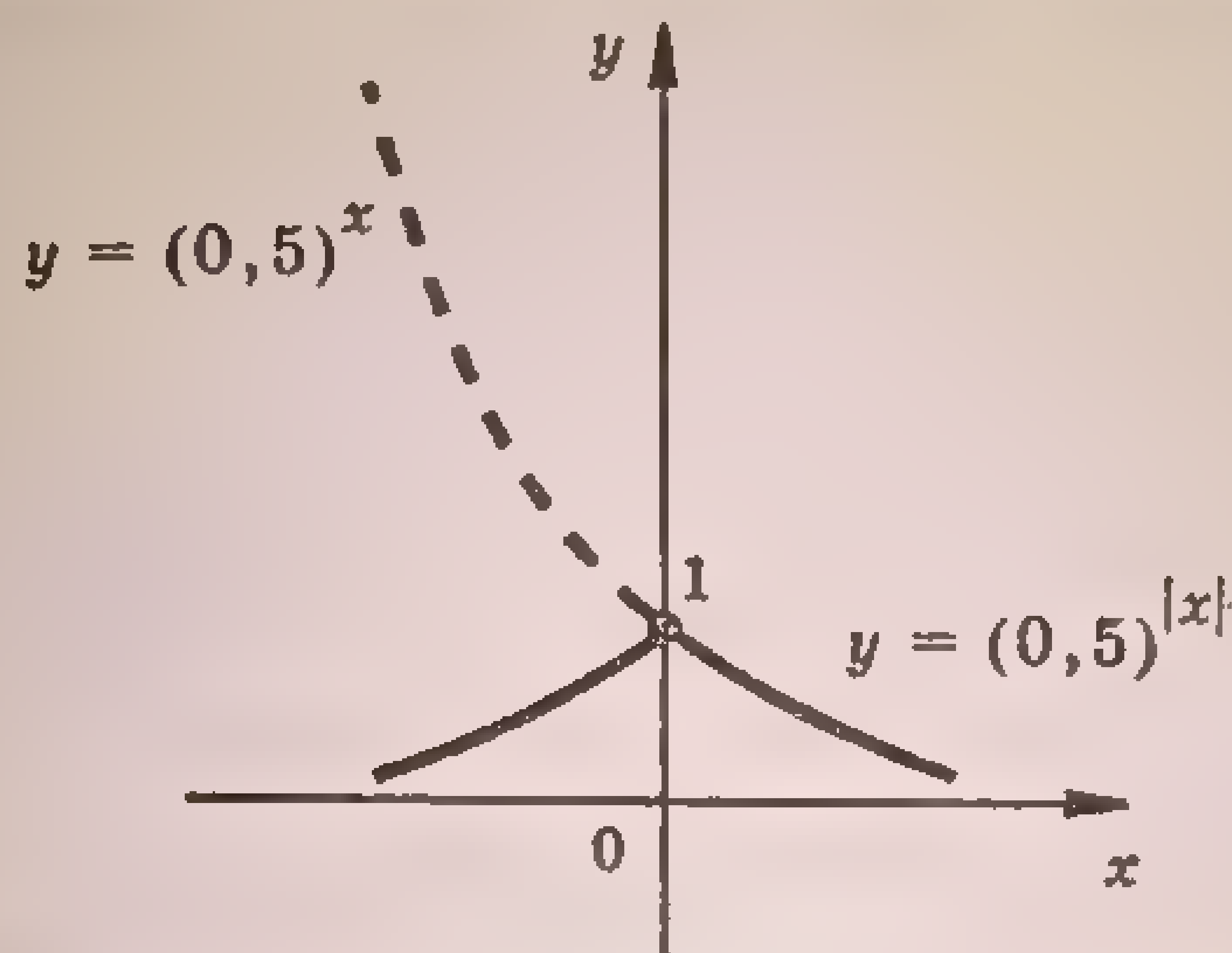
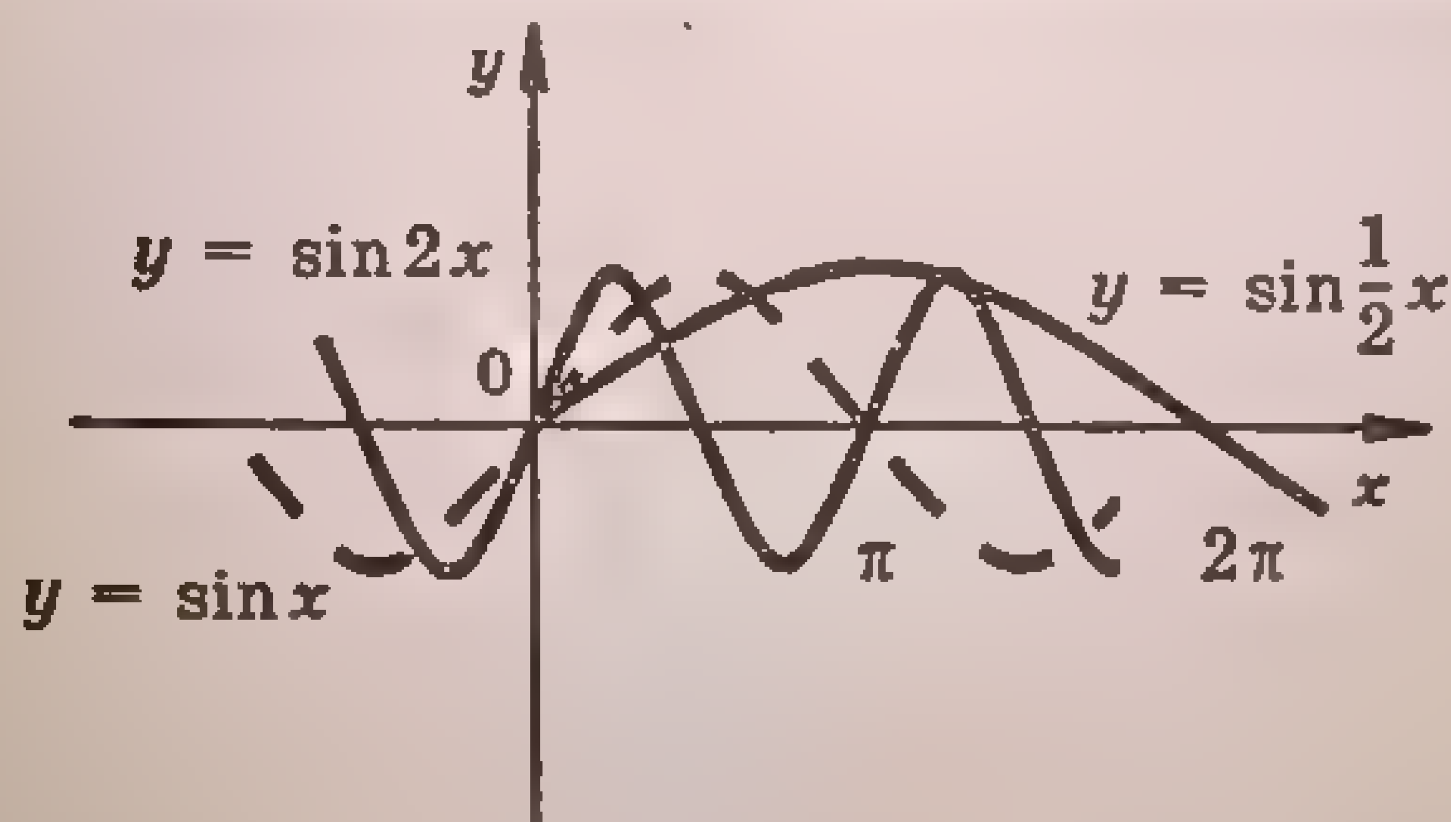
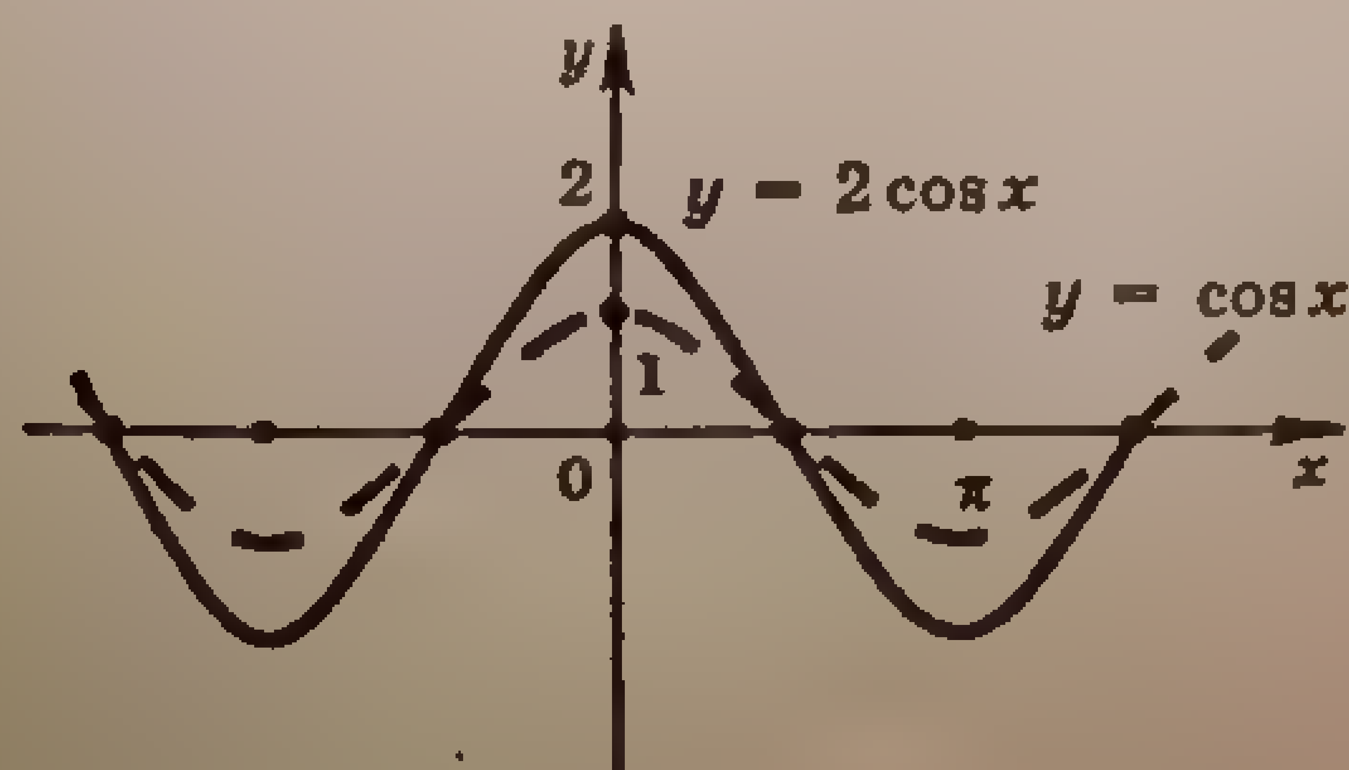
$f(\lvert x\rvert)$	Часть графика в правой полуплоскости и на оси ординат без изменения, а вместо части в левой полуплоскости строим симметричную правой относительно оси *Oy*. 
$f(kx)$ $(k > 0)$	При $k > 1$ сжатие к точке (0; 0) вдоль оси абсцисс в k раз; при $0 < k < 1$ растяжение от точки (0; 0) вдоль оси абсцисс в $1/k$ раз. 
$kf(x)$ $(k > 0)$	При $k > 1$ растяжение от точки (0; 0) вдоль оси ординат в k раз; при $0 < k < 1$ сжатие к точке (0; 0) вдоль оси ординат в $1/k$ раз. 

Таблица 9. ГРАФИК УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

$ax + by = c$	Прямая линия.	
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$	Окружность с центром $(a; b)$ радиуса R.	
$y = \sqrt{a^2 - x^2}$	Полуокружность с центром (0; 0) радиуса a.	
$y = ax^2 + bx + c$	Парабола вида $y = ax^2$; при $a > 0$ ветви вверх, при $a < 0$ ветви вниз; вершина $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.	
$x = ay^2 + by + c$	Парабола вида $x = ay^2$; при $a > 0$ ветви вправо, при $a < 0$ ветви влево; вершина $y_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = x(y_0)$.	

Таблица 9. ГРАФИК УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

$(x-a)(y-b)=k$ $k \neq 0$	Гипербола вида $y=\frac{k}{x}$; асимптоты $x=a$; $y=b$.	
$\|x\|+\|y\|=1$	Квадрат	
$\frac{\|x-a\|}{m}+\frac{\|y-b\|}{n}=1$ $m>0,\ n>0$	Ромб	
$\|x\|-\|y\|=1$	«Перекресток»	

Если дан график зависимости $F(x;\ y)=0$, то график зависимости $F(x-a;\ y-b)=0$ можно получить переносом всех точек на вектор $\vec{p}(a;\ b)$;

график $F(|x|;\ y)=0$ можно получить, оставив часть графика в правой полуплоскости и на оси ординат без изменения, а вместо части в левой полуплоскости построить линию, симметричную правой относительно оси Oy;

график $F(x;\ |y|)=0$ можно получить, оставив часть графика в верхней полуплоскости и на оси абсцисс без изменения, а вместо части в нижней полуплоскости построить линию, симметричную верхней части графика относительно оси Ox.

Таблица 10. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ — это многочлен второй степени; $a \neq 0$ — первый коэффициент; b — второй коэффициент; c — свободный член.

Выделение полного квадрата: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

График функции $F(x) = ax^2 + bx + c$ — парабола; координаты вершины $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = F(x_0) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}$.

$D = b^2 - 4ac$ — *дискриминант* квадратного трехчлена.

Корни квадратного трехчлена

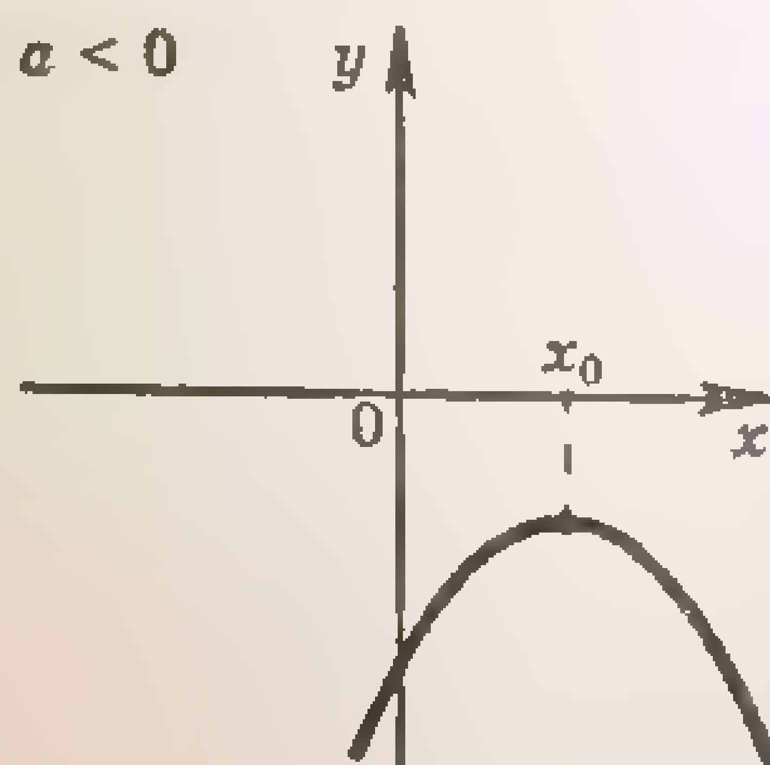
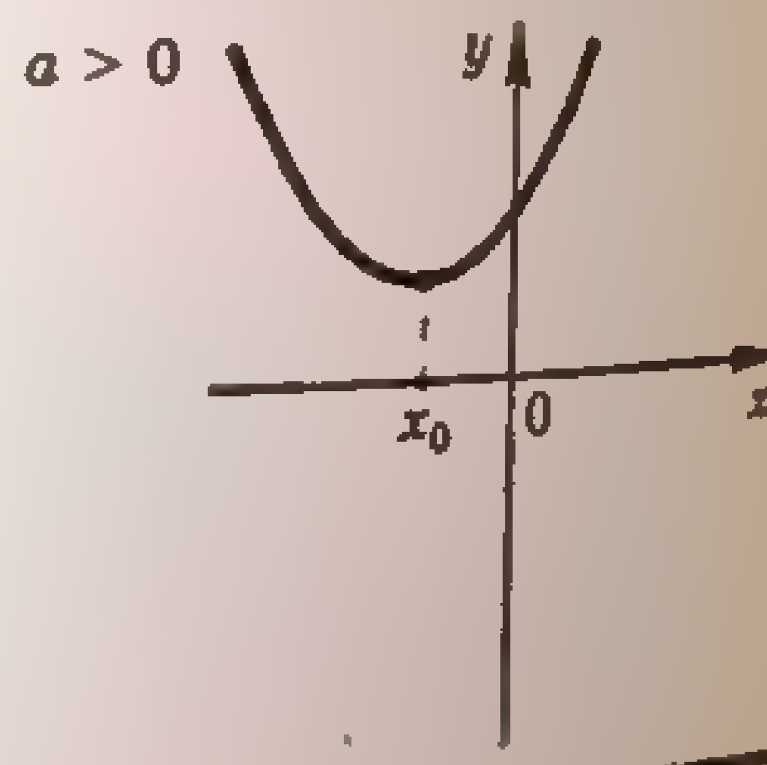
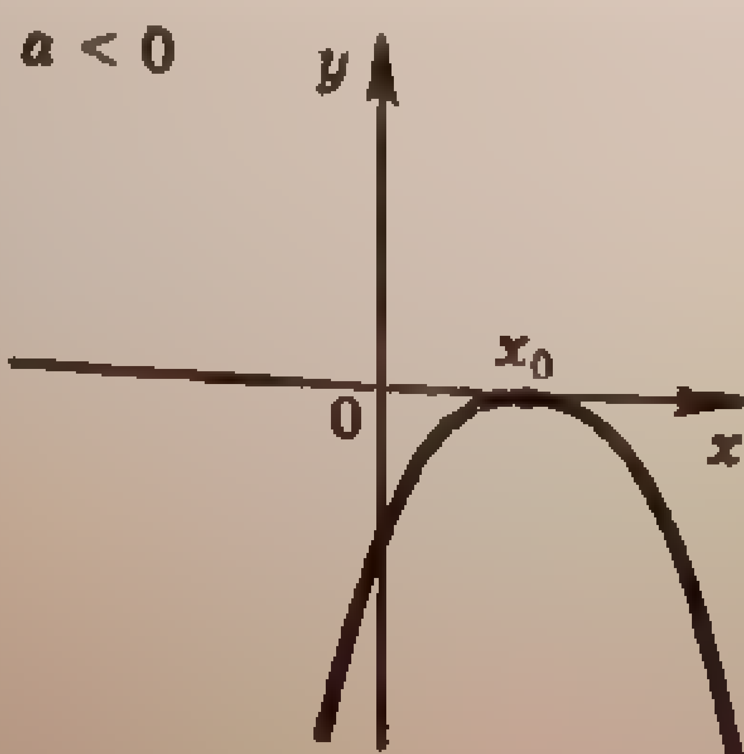
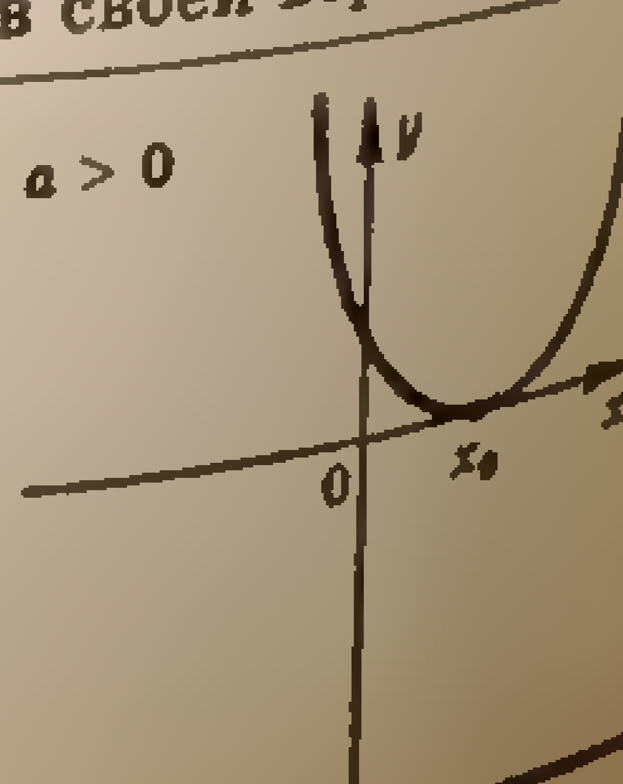
$D < 0$	Квадратный трехчлен *не имеет корней* и сохраняет знак первого коэффициента при всех значениях x: $a \cdot F(x) > 0$.	
		
$D = 0$	Квадратный трехчлен *имеет один корень* (два равных корня) $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$. У функции $F(x)$ два промежутка знакопостоянства, на каждом из которых она сохраняет знак первого коэффициента: $aF(x) > 0$ $(x \neq x_0)$. Парабола касается оси абсцисс в своей вершине.	
		

Таблица 10. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

$D > 0$	Квадратный трехчлен имеет *два корня:* $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$ У функции $F(x)$ три промежутка знакопостоянства.

Теорема Виета

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ (квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$) имеет корни x_1 и x_2 (т.е. $D \geqslant 0$), то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для приведенного ($a = 1$) квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Обратная теорема: Если числа t_1 и t_2 таковы, что $t_1 + t_2 = -\frac{b}{a}$ и $t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a}$, то они являются корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$).

Пример. Квадратное уравнение $x^2 - (5 + \sqrt{7})x + 5\sqrt{7} = 0$ имеет корни $x = 5$; $x = \sqrt{7}$.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

$D < 0$	Квадратный трехчлен на линейные множители не раскладывается.
$D > 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
$D = 0$	$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2$

$D > 0$	Квадратный трехчлен имеет *два корня:* $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a};\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$ У функции $F(x)$ три промежутка знакопостоянства.

Теорема Виета

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ (квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$) имеет корни x_1 и x_2 (т.е. $D \geqslant 0$), то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для приведенного ($a = 1$) квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Обратная теорема: Если числа t_1 и t_2 таковы, что $t_1 + t_2 = -\frac{b}{a}$ и $t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a}$, то они являются корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$).

Пример. Квадратное уравнение $x^2 - (5 + \sqrt{7})x + 5\sqrt{7} = 0$ имеет корни $x = 5$; $x = \sqrt{7}$.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

$D < 0$	Квадратный трехчлен на линейные множители не раскладывается.
$D > 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
$D = 0$	$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2$

Таблица 10. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Составление квадратного трехчлена с корнями t_1 и t_2

Существует бесконечно много квадратных трехчленов с корнями t_1 и t_2; они имеют вид

$$a(x^2 - (t_1 + t_2)x + t_1 \cdot t_2),$$

среди них один приведенный:

$$x^2 - (t_1 + t_2)x + t_1 \cdot t_2.$$

Пример. Приведенный квадратный трехчлен с корнями 2 и 8.

$$x^2 - 10x + 16,$$

так как $2 + 8 = 10$, $2 \cdot 8 = 16$.

Корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$

положительны, если	отрицательны, если
$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ D = b^2 - 4ac \geqslant 0 \end{cases}$	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$
одного знака, если	**разных знаков, если**
$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \\ D = b^2 - 4ac \geqslant 0 \end{cases}$	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$

Таблица 11. ПРОГРЕССИИ

Последовательность — функция натурального аргумента.

Задание последовательности *формулой общего члена*	$a_n = f(n),\ n \in N$ $a_n = n^2 + n + 41$ $a_1 = 43;\ a_2 = 47;\ a_3 = 53;\ \ldots$
Задание последовательности *рекуррентным соотношением*	Дано: $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{n-1}$ $a_n = f(a_{n-1};\ a_{n-2};\ \ldots;\ a_1)$

Числа Фибоначчи: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; ... .
$(a_1 = a_2 = 1;\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1})$

Формула общего члена: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Свойства: $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1} = a_{2n+2};$

$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1.$

Арифметической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентным соотношением: $a_{n+1} = a_n + d,\ n \in N$
(a_1 — первый член прогрессии, d — *разность* прогрессии).

Геометрической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентным соотношением: $b_{n+1} = b_n \cdot q$
($b_1 \neq 0$ — первый член прогрессии; $q \neq 0$ — *знаменатель* прогрессии).

	Арифметическая (÷)	Геометрическая (∺)
Допустимые значения	a_1 и d любые	b_1 и q не равны нулю
Формула общего члена	$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Характеристическое свойство	$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} = a_n$	$b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b_n^2$ $b_n \neq 0$
Формула суммы n первых членов	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$	$q \neq 1,\ S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ $q = 1,\ S_n = n \cdot b_1$

Другие формулы	$\frac{a_n - a_m}{n - m} = d,\ (n \neq m)$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1}$	$b_n : b_m = q^{n-m}$ $b_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k+1}$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $(0 < |q| < 1)$

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0, \quad S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}.$$

Формула суммы: $\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}}$

Примеры

$$0{,}(37) = 0{,}37 + 0{,}0037 + \ldots = \frac{0{,}37}{1 - 0{,}01} = \frac{37}{99}$$

$(b_1 = 0{,}37;\ q = 0{,}01)$

$$0{,}5(2) = 0{,}5 + 0{,}02 + 0{,}002 + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{0{,}02}{1 - 0{,}1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{90} = \frac{47}{90}$$

$(b_1 = 0{,}02;\ q = 0{,}1)$

Суммирование

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Примеры

Если a_n арифметическая прогрессия, то

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \ldots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}.$$

Все натуральные числа, дающие при делении на 7 в остатке 5, имеют вид

$a_n = 7(n-1) + 5 = 7n - 2,\ n \in N.$

Таблица 12. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Тригонометрической (единичной) окружностью называется окружность с центром в начале координат, радиуса 1. Точки единичной окружности можно поставить в соответствие действительным числам. Числу 0 ставится в соответствие точка $P_0(1; 0)$, а каждому числу t ставится в соответствие точка P_t, полученная поворотом точки $P_0(1; 0)$ на угол t вокруг начала координат (если $t > 0$, то поворот осуществляется против часовой стрелки, если $t < 0$ — по часовой стрелке).

Таким образом, *каждому действительному числу t соответствует единственная точка на единичной окружности* P_t, а каждой точке P_t — бесконечное множество действительных чисел вида $t + 2\pi k$, $k \in Z$.

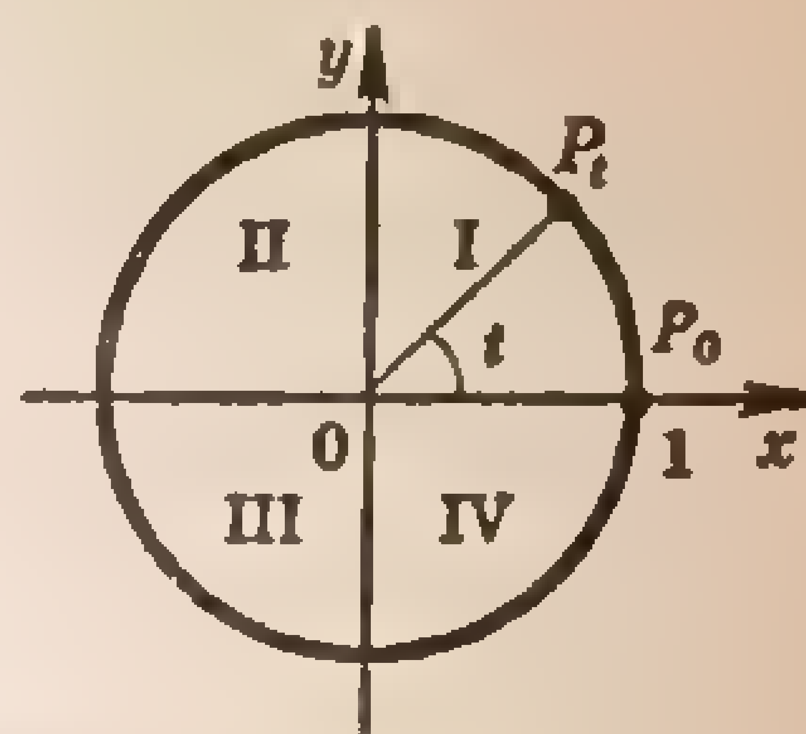
Длина дуги $\overset{\frown}{P_0P_t} = t$ $(0 < t \leqslant 2\pi)$.

I четверть:

$$0 + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

II четверть:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \pi + 2\pi k.$$



III четверть:

$$\pi + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k.$$

IV четверть:

$$\frac{3\pi}{2} + 2\pi k < t < 2\pi + 2\pi k.$$

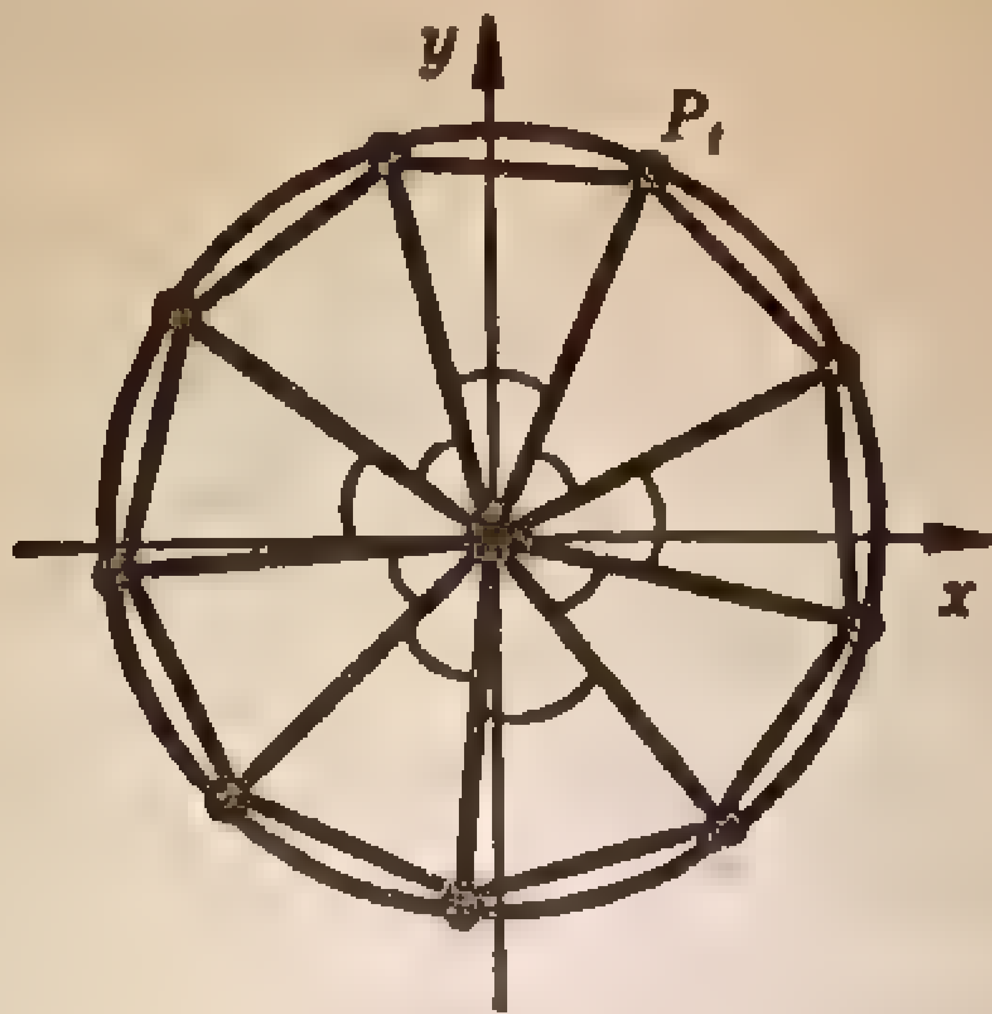
Связь градусной и радианной мер:

$$\alpha^\circ = \pi \cdot \left(\frac{\alpha^\circ}{180^\circ}\right) \text{ (радиан)}; \quad x \text{ (радиан)} = \left(\frac{x}{\pi} \cdot 180\right)^\circ.$$

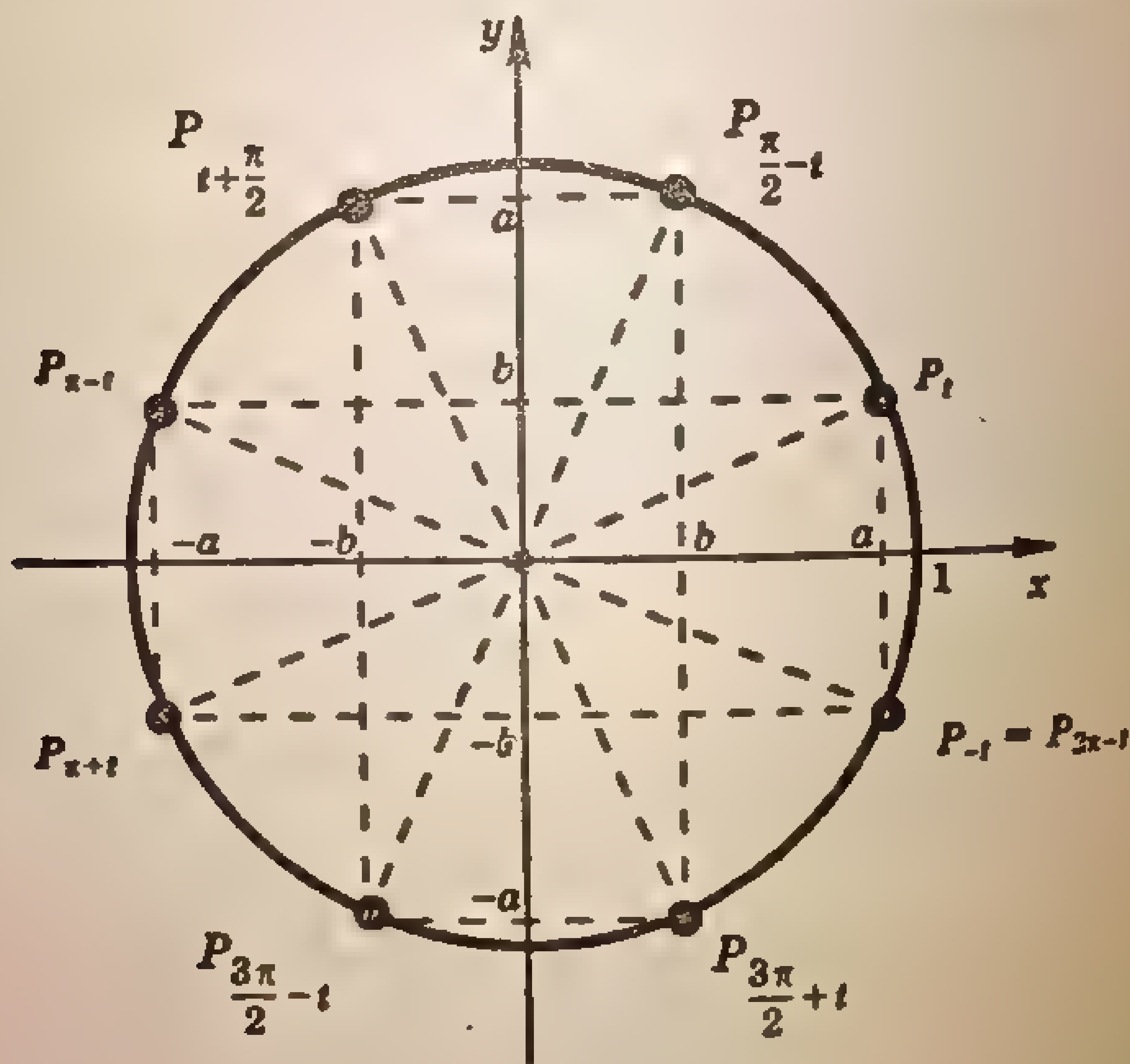
Две точки, симметричные относительно

оси абсцисс	оси ординат	начала координат
$\alpha = \pm t + 2\pi m$, $m \in Z$	$\alpha = (-1)^n t + \pi n$, $n \in Z$	$\alpha = t + \pi k$, $k \in Z$

Вершины правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность (одна из вершин P_t).



$$\alpha = t + \frac{2\pi}{n} \cdot k,\ k \in Z$$

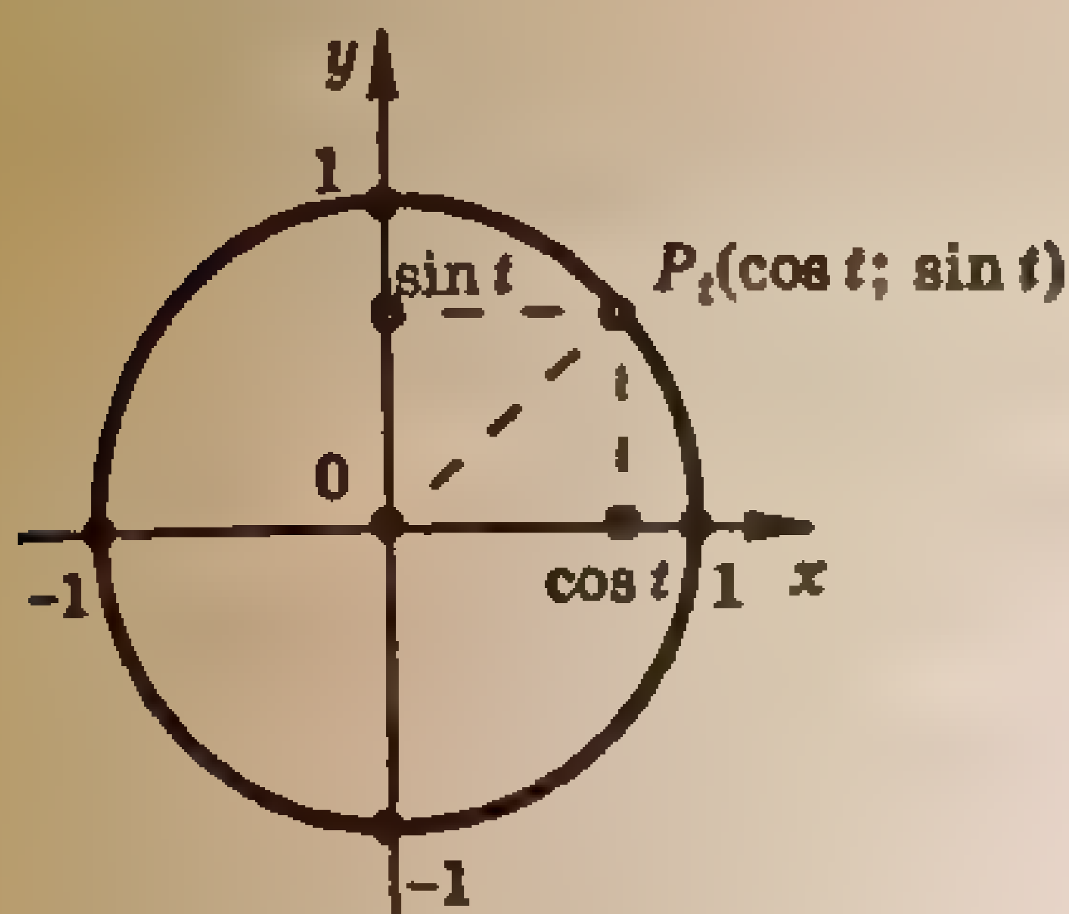


$P_t\,(a;\ b)$ $\quad P_{t+\frac{\pi}{2}}(-b;\ a)$ $\quad P_{\pi+t}\,(-a;\ -b)$ $\quad P_{\frac{3\pi}{2}+t}(b;\ -a)$

$P_{\frac{\pi}{2}-t}(b;\ a)$ $\quad P_{\pi-t}\,(-a;\ b)$ $\quad P_{\frac{3\pi}{2}-t}(-b;\ -a)$ $\quad P_{-t}\,(a;\ -b)$

Таблица 13. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Косинусом числа t называется абсцисса точки P_t единичной окружности, а ***синусом*** — ордината этой точки.



Тангенсом числа t называется отношение $\sin t$ к $\cos t$ ($\cos t \neq 0$).

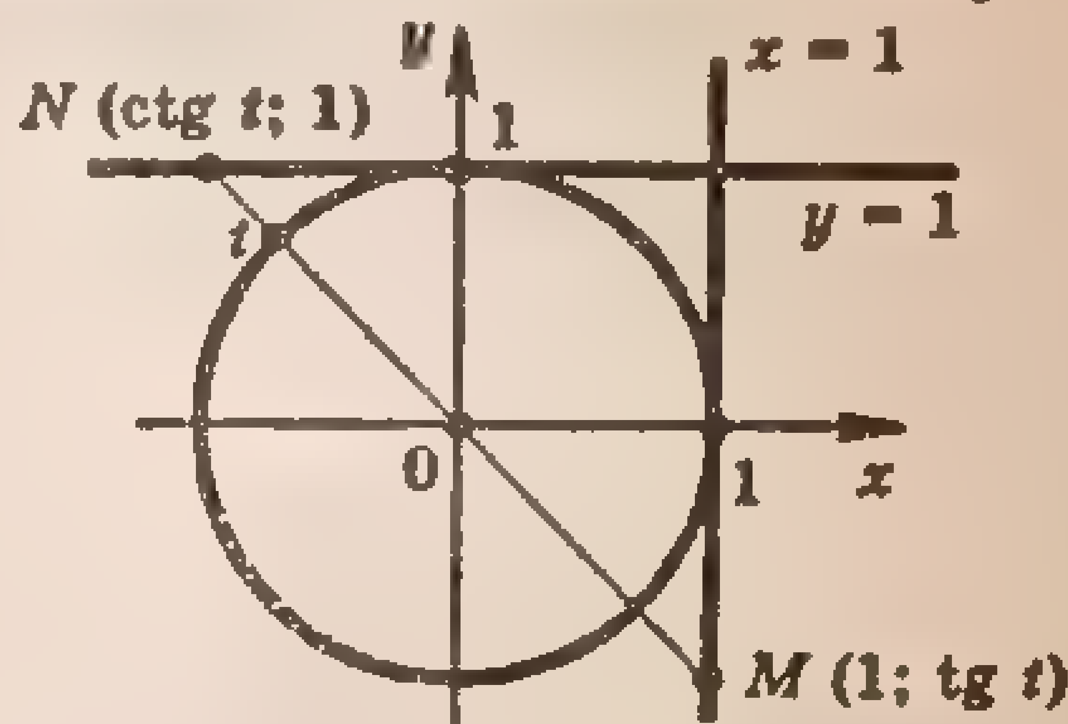
$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

Ось тангенсов — прямая $x = 1$.

Котангенсом числа t называется отношение $\cos t$ к $\sin t$.

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} \qquad (\sin t \neq 0)$$

Ось котангенсов — прямая $y = 1$.



Основные формулы

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $t \in R$.

$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$

$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$, $t \neq \pi l$, $l \in Z$

Дополнительные формулы

$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$

$1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$, $t \neq \pi k$, $k \in Z$

$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$, $t \neq \frac{\pi l}{2}$, $l \in Z$

Формулы приведения преобразуют тригонометрические функции чисел $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ в тригонометрические функции числа $\alpha \in R$. (Удобно считать α углом первой четверти.)

t	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\cos t$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\sin t$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\operatorname{tg} t$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Таблица 13. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

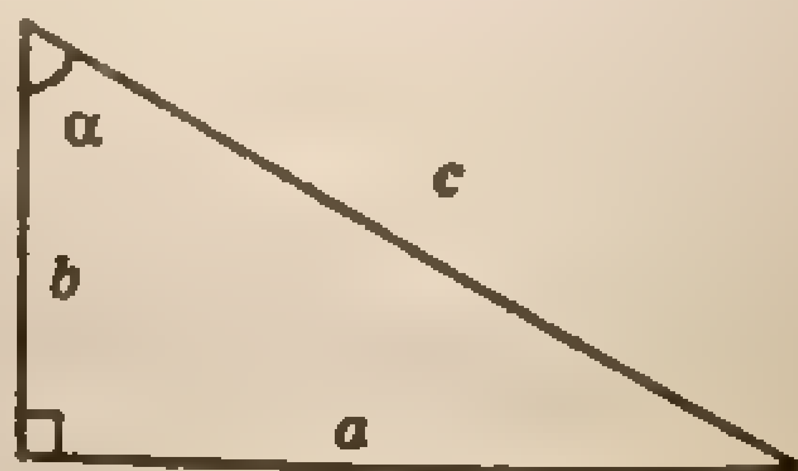
Периодичность		**Четность**
$\cos(t + 2\pi) = \cos t$ $T_{\cos} = 2\pi$	$\text{tg}(t + \pi) = \text{tg } t$ $T_{\text{tg}} = \pi$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\sin(t + 2\pi) = \sin t$ $T_{\sin} = 2\pi$	$\text{ctg}(t + \pi) = \text{ctg } t$ $T_{\text{ctg}} = \pi$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α, рад	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
α°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
$\text{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не опр.	0	не опр.
$\text{ctg}\,\alpha$	не опр.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не опр.	0

Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ $\text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$



Приближеные значения тригонометрических функций некоторых углов

α°	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	85°	
sin α ≈	0,09	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	1,00	≈ cos α
tg α ≈	0,09	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67	11,43	≈ ctg α
	85°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	5°	α°

Для малых положительных чисел $\sin\alpha \approx \alpha$ и $\text{tg}\,\alpha \approx \alpha$.

Таблица 13. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Знаки тригонометрических функций по четвертям

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$
I: +; II: +; III: −; IV: −	I: +; II: −; III: −; IV: +	I: +; II: −; III: +; IV: −

Способы нахождения значений тригонометрических функций числа (угла) α

по формулам	*по вспомогательному треугольнику*
$\cos\alpha = -0{,}6$; II четверть	$\mathrm{tg}\,\alpha = 3$; III четверть
$\lvert\sin\alpha\rvert = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}36} = 0{,}8$ $\sin\alpha > 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0{,}8$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4}{3}$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = -\frac{3}{4}$	(треугольник: катеты 1 и 3, гипотенуза $\sqrt{10}$, угол φ) $\sin\alpha < 0 \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\mathrm{ctg}\,\alpha > 0 \Rightarrow \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{3}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{5}{12}$; IV четверть	$\sin\alpha = 0{,}1$; I четверть
$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{169}{144}$ $\lvert\sin\alpha\rvert = \frac{12}{13}$ $\sin\alpha < 0 \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{12}{13}$ $\lvert\cos\alpha\rvert = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$ $\cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{13}$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha} = -\frac{12}{5}$	(треугольник: катеты 1 и $\sqrt{99}$, гипотенуза 10, угол φ) $\cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{99}}{10}$ $\mathrm{tg}\,\alpha > 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{99}}$ $\mathrm{ctg}\,\alpha > 0 \Rightarrow \mathrm{ctg}\,\alpha = \sqrt{99}$

Таблица 13. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Формулы сложения	Формулы двойного угла
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ $\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 - \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;$ $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\ x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ $\mathrm{tg}(x-y) = \frac{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y}{1 + \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;$ $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\ x - y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ $\mathrm{tg}\, 2x = \frac{2\mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}^2 x};$ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
Формулы понижения степени	**Дополнительные формулы**
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$	$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
Формулы половинного угла	**Универсальная подстановка**
$\left\|\cos\frac{x}{2}\right\| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ $\left\|\sin\frac{x}{2}\right\| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x};$ $x \neq \pi k,\ k \in Z$	$\cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ $x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

Формулы преобразования

суммы в произведение

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y+x)}{\sin x\cdot\sin y}$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x\cdot\sin y}$$

произведения в сумму

$$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$$

$$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

$$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$$

Формула дополнительного угла

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\alpha), \text{ где } \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a^2+b^2\neq 0$$

Таблица 14. ЛОГАРИФМЫ

Логарифмом **положительного числа a по положительному и не равному единице основанию b называется показатель степени, в который надо возвести число b, чтобы получить a.**

$\log_b a = c$ $(a > 0;\ b > 0;\ b \ne 1)$ тогда и только тогда, когда $b^c = a$

Основное логарифмическое тождество: $b^{\log_b a} = a$.

Примеры

$5^{\log_5 7} = 7$	$2^{\log_2 0,7} = 0,7$	$8^{\log_2 3} = (2^3)^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^3 = 3^3 = 27$

$\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$	$\log_{0,25} 16 = -2$, так как $0,25^{-2} = 16$
$\log_9 27 = 1,5$, так как $9^{\frac{3}{2}} = 27$	$\log_{25} \sqrt{5} = 0,25$, так как $25^{0,25} = \sqrt{5}$

$\log_9 (-7)$ не определен, так как $-7 < 0$;
$\log_{(-2)} (-8)$ не определен, так как $-2 < 0$, $-8 < 0$;
$\log_1 27$ не определен, так как не выполнено условие $b \ne 1$.

Логарифмы по основанию 10 называются *десятичными логарифмами*: $\log_{10} a = \lg a$.

Примеры.
$\lg 100 = 2$; $\lg 0,0001 = -4$; $\lg 100000000 = 8$;
$3 < \lg 2156 < 4$; $-1 < \lg 0,56 < 0$.

a	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lg a \approx$	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95

Логарифмы по основанию e называются *натуральными логарифмами*: $\log_e a = \ln a$.
$e = 2,718281828459045...$ иррациональное число; $e \approx 2,7$.

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000
$\ln a \approx$	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,20	2,30	4,61	6,91

Свойства логарифмов

$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$	$\log_a a^m = m$
$\log_a \frac{1}{a} = -1$	$\log_{a^m} a = \frac{1}{m}$	$\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$

Основные соотношения	Дополнительные соотношения
Логарифм произведения: $\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b.$ Логарифм частного: $\log_c (a/b) = \log_c a - \log_c b.$ Логарифм степени: $\log_c a^k = k \log_c a.$ Переход к новому основанию: $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$ $\frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b$ $\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c$ $a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$

Примеры

$$5^{\frac{1}{\log_6 5}} = 5^{\log_5 6} = 6.$$

$$\sqrt{\log_5 49 \cdot \log_7 25} = \sqrt{\log_7 49 \cdot \log_5 25} = \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$$

Сравнить: $4^{\log_3 7}$ и $6^{\log_3 4}$.

Так как $6^{\log_3 4} = 4^{\log_3 6}$ и $\log_3 7 > \log_3 6$, то $4^{\log_3 7} > 6^{\log_3 4}$.

Сравнение логарифмов

Если $0 < a < 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$.
(знак неравенства меняется)

Если $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$
(знак неравенства не меняется)

Если $1 < a < b$	и	$x > 1$,	то	$\log_a x > \log_b x$.
Если $0 < a < b < 1$	и	$x > 1$,	то	$\log_a x > \log_b x$.
Если $1 < a < b$	и	$0 < x < 1$,	то	$\log_a x < \log_b x$.
Если $0 < a < b < 1$	и	$0 < x < 1$,	то	$\log_a x < \log_b x$.

$\log_b a > 0$ тогда и только тогда, когда положительные числа a и b лежат «по одну сторону от единицы»: $a > 0$; $b > 0$ и $(a-1)(b-1) > 0$.

$\log_b a < 0$ тогда и только тогда, когда положительные числа a и b лежат «по разные стороны от единицы»: $a > 0$; $b > 0$ и $(a-1)(b-1) < 0$.

Примеры

$\log_{0,7} 0{,}2 < \log_{0,7} 0{,}11$	$\log_6 2 < \log_6 11$	$\log_5 7 > \log_8 7$
$\log_{0,2} 7 > \log_{0,8} 7$	$\log_4 5 < \log_3 5 < \log_3 6 \Rightarrow \log_4 5 < \log_3 6$	

Сравнить $\log_4 15$ и $\sqrt{17}$.

Так как $\log_4 15 < 4$, а $\sqrt{17} > 4$, то

$\log_4 15 < \sqrt{17}$.

Сравнить $\log_3 4$ и $\log_4 5$.

I способ.

$$\log_3 4 \quad ? \quad \log_4 5$$

$$\log_3 4 - 1 \quad ? \quad \log_4 5 - 1$$

$$\log_3 \frac{4}{3} \quad ? \quad \log_4 \frac{5}{4}$$

Так как $\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$, то

$\log_3 \frac{4}{3} > \log_3 \frac{5}{4} > \log_4 \frac{5}{4}$,

т. е. $\log_3 4 > \log_4 5$.

II способ. Рассмотрим функцию $f(x) = \log_x (x+1) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ при $x > 1$.

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\ln x}{x+1} - \dfrac{\ln(x+1)}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x \cdot \ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2} < 0$$

при $x > 1$.

Значит, $\log_3 4 > \log_4 5$, так как функция $f(x)$ убывает.

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

Корнем уравнения называется значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство.

Примеры

$x^3 + x = 0$ — один корень: $x = 0$.

$(x^2 + x - 12)\cdot\sqrt{x+3} = 0$ — два корня: $x = -3$, $x = 3$.

$\sin(\pi x) = 0$ — бесконечное число корней $x \in Z$.

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ — верно при всех $x \in R$.

$x^2 = x^2 + 1$ — нет корней (пустое множество корней $\varnothing$).

Два уравнения называются *равносильными*, если множества их корней совпадают.

Примеры

$x^2 = x + 2$	и	$x^2 - x - 2 = 0$	равносильны.
$x^4 + 2 = -16$	и	$\sin 3x = 2$	равносильны.
$\sqrt{x} = 2x - 6$	и	$x = (2x - 6)^2$	неравносильны.

Неравносильные преобразования могут привести к:

потере корня

$x(x + 5) = 2x$ $x + 5 = 2$ $x = -3$ Потерян корень $x = 0$.	правильное решение: $x^2 + 5x - 2x = 0$ $x^2 + 3x = 0$ $x(x + 3) = 0$ $x = 0$; $x = -3$

появлению «посторонних» корней

$\frac{x^2+x-1}{x-1} = \frac{4x-3}{x-1}$ $x^2 + x - 1 = 4x - 3$ $x^2 - 3x + 2 = 0$ $x = 1$ и $x = 2$ «Посторонний» корень $x = 1$.	правильное решение: $\begin{cases} x^2+x-1 = 4x-3 \\ x \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-3x+2 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ *Ответ*: $x = 2$.

Методы решения уравнений

Разложение на множители

Произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них ноль, а остальные при этом существуют.

$$(x-1)(x^2-4)\cdot\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\pm2\\x=0\end{array}\right.\\x\geqslant0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=0\end{array}\right.$$ *Ответ:* 0; 1; 2.

Замена переменной

$$(x+1)^4+x^2=1-2x \Leftrightarrow (x+1)^4+(x^2+2x+1)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t=(x+1)^2\geqslant0\\t^2+t-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-2\end{array}\right.\\t\geqslant0\end{cases} \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\end{array}\right.$$

Использование монотонности

$2^x+5^x=29$. Функция $f(x)=2^x+5^x$ возрастает; $f(2)=29 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=2$ — единственный корень.

Сравнение обеих частей по величине

$$\sin^7x-\cos^{22}x=1 \Leftrightarrow \sin^7x=1+\cos^{22}x,\ \left(\begin{array}{l}\sin^7x\leqslant1\\1+\cos^{22}x\geqslant1\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sin^7x=1\\\cos^{22}x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=1\\\cos x=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$$

Использование однородности

$3(x+8)^2-4(x+8)(x^2+2x+2)+(x^2+2x+2)^2=0.$

Пусть $x+8=a$; $x^2+2x+2=b$. Тогда $3a^2-4ab+b^2=0$,

$a_{1,2}=\frac{2b\pm b}{3}$; $a=b$ или $a=\frac{b}{3}$.

$x+8=x^2+2x+2$ $x^2+x-6=0$ $x_1=-3;\ x_2=2$	$3x+24=x^2+2x+2$ $x^2-x-22=0$ $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{89}}{2}$	*Ответ:* -3; 2; $\frac{1-\sqrt{89}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{89}}{2}$.

Линейные уравнения
(приводимые к виду $ax = b$)

$a \neq 0$ один корень $x = \frac{b}{a}$	$a = b = 0$ бесконечное множество корней $x \in R$	$a = 0,\ b \neq 0$ решений нет

Квадратные уравнения
(приводимые к виду $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$)

Равносильными преобразованиями уравнение приводится к виду $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Наличие корней зависит от знака выражения:

$D = b^2 - 4ac$ (*дискриминант* квадратного уравнения).

$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$ два корня
корней нет	один корень $x = -\frac{b}{2a}$	$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$; $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$
$a > 0$, y, 0, x_0, x	$a > 0$, y, 0, x_0, x	$a > 0$, y, x_0, x_1, 0, x_2, x, $x_1 < x_2$

Частные формулы для решения квадратных уравнений

Приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ $(a = 1)$	Квадратное уравнение *с четным вторым коэффициентом* $ax^2 + 2kx + c = 0$ $(b = 2k)$
Если $D > 0$, $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$; если $D = 0$, $x = -\frac{p}{2}$.	$D^* = k^2 - ac$ $\left(D^* = \frac{1}{4}D\right)$ Если $D^* > 0$, $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D^*}}{a}$; если $D^* = 0$, $x = -\frac{k}{a}$.

***Неполное** квадратное уравнение*

$ax^2 + c = 0$ $(b = 0)$	$ax^2 + bx = 0$ $(c = 0)$	$ax^2 = 0$
Если $ac > 0$, решений нет; если $ac < 0$, $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.	$x(ax + b) = 0$ два корня: $x = 0$, $x = -\frac{b}{a}$.	один корень $x = 0$

Алгебраические уравнения высших степеней

(приводимые к виду $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен степени выше 2)

Разложение на множители

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$

$(x - 2)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 2;\ x = \pm 1$

Подстановка

(биквадратное уравнение)

$x^4 - 3x^2 + 2 = 0;\ x^2 = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$t = 1;\ t = 2 \Rightarrow x = \pm 1;\ x = \pm\sqrt{2}$

Применение схемы Горнера

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

	1	−4	1	6	
−1	1	−5	6	0	$\Rightarrow x = -1$
2	1	−3	0		$\Rightarrow x = 2$
3	1	0			$\Rightarrow x = 3$

Использование монотонности

$x^3 + x - 6\sqrt{5} = 0$

$x^3 + x = 6\sqrt{5}$

Функция $F(x) = x^3 + x$ возрастает на R; $F(\sqrt{5}) = 6\sqrt{5} \Rightarrow$

$x = \sqrt{5}$ — единственный корень.

Возвратное уравнение

$2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$

Так как $x = 0$ не является корнем, можно делить на x^2.

$2x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 0,$

$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$

Подстановка: $y = x + \frac{1}{x}$;

$y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}.$

$2(y^2 - 2) - 5y + 6 = 0$

$2y^2 - 5y + 2 = 0$

Использование однородности

$3x^2 + 4x(x^2 + 3x + 4) + (x^2 + 3x + 4)^2 = 0$

Пусть $y = x^2 + 3x + 4$.

Тогда $3x^2 + 4xy + y^2 = 0$.

Решаем относительно x:

$x = -y;\ x = -\frac{1}{3}y.$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} x = -x^2 - 3x - 4 \\ 3x = -x^2 - 3x - 4 \end{array}\right.$$

Ответ: $-2;\ -3 \pm \sqrt{5}$.

Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \text{ (или } g(x) \geq 0) \end{cases}$$

Неравенства в системах, как правило, проверяют, а не решают.

Иррациональные уравнения

Простейшие	$\sqrt{3x+1}=2$ $3x+1=4$ $x=1$	$\sqrt{1-2x}=-5$ корней нет

Возведение обеих частей уравнения в степень $\sqrt{5x+6}+\sqrt{3x+4}=2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6\geqslant 0;\ 3x+4\geqslant 0 \\ 5x+6+3x+4+ \\ +2\sqrt{(5x+6)(3x+4)}=4 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6\geqslant 0 \\ \sqrt{(5x+6)(3x+4)}=-4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6\geqslant 0;\ -4x-3\geqslant 0 \\ (5x+6)(3x+4)=(-4x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=-1$	*Замена переменной* $\sqrt{2-x}=3x+8$ Пусть $y=\sqrt{2-x}\geqslant 0$. Тогда $x=2-y^2$ и $y=3(2-y^2)+8 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 0 \\ 3y^2+y-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y=2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x}=2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=-2$

Уравнения, связанные со степенной функцией

$5x^{2/3}+x^{1/3}-6=0$ $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ y=x^{1/3}\geqslant 0 \end{cases}$ $5y^2+y-6=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y=1;\ y=-\frac{6}{5}<0$ $x^{1/3}=1 \Rightarrow x=1$	$5\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-6=0$ $y=\sqrt[3]{x}\in R$ $5y^2+y-6=0$ $y=\sqrt[3]{x}=1,\ y=\sqrt[3]{x}=-\frac{6}{5}$ $x=-\left(\frac{6}{5}\right)^3=-\frac{216}{125}$ *Ответ:* $x=1;\ x=-\frac{216}{125}$.	$x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}=4$ $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=4 \end{cases}$ $x^2=4$ $x=\pm 2$ *Ответ:* $x=2$.

Показательные уравнения

Решение простейших показательных уравнений основано на монотонности показательной функции $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $D(y) = R$, $E(y) = (0; +\infty)$).

Простейшее показательное уравнение $a^x = b$ при $b > 0$ имеет единственное решение, записывающееся в общем виде $x = \log_a b$.

При $b \leqslant 0$ решений нет.

$6^x = 36$ $x = \log_6 36$ $x = 2$	$2^x = \frac{1}{8}$ $x = \log_2 (1/8)$ $x = -3$	$100^x = 10$ $x = \log_{100} 10$ $x = 0{,}5$	$10^x = 3$ $x = \lg 3$	$e^x = 2$ $x = \ln 2$	$625^x = -25$ решений нет

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильны уравнению $f(x) = g(x)$.

Методы решения показательных уравнений

Приведение к одному основанию $5^x \cdot 0{,}2 = 125^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{5}$ $5^x \cdot 5^{-1} = 5^{\frac{3x}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$ $5^{x-1} = 5^{\frac{3x+1}{2}}$ $x - 1 = \frac{3x+1}{2} \Rightarrow x = -3$	*Логарифмирование обеих частей уравнения* $6^{1/x} \cdot 2^x = 12$ Логарифмируем по основанию 2: $\frac{1}{x}\log_2 6 + x = \log_2 12 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 + \log_2 3 + x^2 = (2 + \log_2 3)x$ $x^2 - (2 + \log_2 3)x + (1 + \log_2 3) = 0$ *Ответ*: $x = 1$; $x = 1 + \log_2 3$.

Вынесение за скобку $7^x + 7^{x+2} = 350$ $7^x(1 + 7^2) = 350$ $7^x = \frac{350}{1+7^2} = 7$ $x = 1$	*Составление отношения* $4^x + 3^{x-1} = 4^{x-1} + 3^{x+2}$ $4^x - 4^{x-1} = 3^{x+2} - 3^{x-1}$ $4^{x-1}(4 - 1) = 3^{x-1}(3^3 - 1)$ $4^{x-1} \cdot 3 = 3^{x-1} \cdot 26$ $\frac{4^{x-1}}{3^{x-1}} = \frac{26}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{x-1} = \frac{26}{3}$ $x = \log_{\frac{4}{3}} \frac{26}{3} + 1$	*Замена переменной* $25^x + 5^{x+1} - 6 = 0$ $5^x = y > 0$ $y^2 + 5y - 6 = 0$ $y = 1$; $y = -6 < 0$ $5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

«Завуалированное» обратное число	*Использование однородности*	*Использование монотонности*
$(\sqrt{5}-2)^x+(\sqrt{5}+2)^x=18$ $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=$ $=5-4=1$ Пусть $(\sqrt{5}-2)^x=y>0$ $y+\frac{1}{y}=18 \Rightarrow y=9\pm4\sqrt{5}$ $(\sqrt{5}-2)^x=9-4\sqrt{5}=$ $=(\sqrt{5}-2)^2 \Rightarrow x=2$ $(\sqrt{5}-2)^x=9+4\sqrt{5}=$ $=(\sqrt{5}+2)^2=(\sqrt{5}-2)^{-2} \Rightarrow$ $x=-2$ *Ответ*: 2; –2.	$3\cdot16^x-12^x=4\cdot9^x$ Делим на $9^x>0$: $3\cdot\left(\frac{16}{9}\right)^x-\left(\frac{12}{9}\right)^x=4$ $3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-\left(\frac{4}{3}\right)^x-4=0$ Пусть $\left(\frac{4}{3}\right)^x=y>0 \Rightarrow$ $3y^2-y-4=0 \Rightarrow$ $y=\frac{4}{3}$; $y=-1<0 \Rightarrow$ $\left(\frac{4}{3}\right)^x=\frac{4}{3} \Rightarrow x=1$	$2^x+5^x=29$ $f(x)=2^x+5^x$ возрастает на R. $f(2)=29 \Rightarrow$ $x=2$ — единственный корень.

Логарифмические уравнения

Решение простейших логарифмических уравнений основано на монотонности логарифмической функции $y=\log_a x$ ($a>0$; $a\neq1$; $D(y)=(0;+\infty)$; $E(y)=R$).

Типы простейших логарифмических уравнений

1) $\log_a x=b$ при всех допустимых a имеет единственное решение $x=a^b$.
2) $\log_a(f(x))=b$ равносильно уравнению $f(x)=a^b$.
3) $\log_a(f(x))=g(x)$ равносильно уравнению $f(x)=a^{g(x)}$.
4) $\log_a(f(x))=\log_a(g(x))$ равносильно системе: $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$

Причем любую из двух последних строк можно (и, как правило, нужно) опустить.

В логарифмических уравнениях, как правило, совершенно не обязательно находить области существования функций, входящих в уравнение. Достаточно проверить, какие из полученных корней уравнения системы удовлетворяют неравенствам в системе.

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

Уравнения, сводящиеся к типу 4

$$\log_2(x^2+x-2) = 1 + \log_2 x \Leftrightarrow \log_2(x^2+x-2) = \log_2(2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 = 2x \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Замена переменной

$$\lg^2\left(\frac{10}{x}\right) + \lg x = 7$$

$$(\lg 10 - \lg x)^2 + \lg x = 7$$

$$y = \lg x \Rightarrow$$

$$(1-y)^2 + y = 7 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 3 \\ \lg x = -2 \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 1000$; $x = 0,01$.

Потенцирование уравнений, сводящихся к типу 4

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) + \log_3\left(\frac{x}{2}\right) = 2 - 2\log_{\frac{1}{9}}(x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{2} = \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9} - \log_{\frac{1}{3}}(x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2(x+1)}{x} = \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{9x^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{2(x+1)}{x} = \dfrac{1}{9x^2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{11}-3}{6}$$

Уравнение с неизвестным в основании логарифма

$$\log_x 5 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^3 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$$

Ответ: $\sqrt[3]{5}$.

$$\Leftrightarrow \log_{x^2} x = 0,5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 1 \\ x > 0 \\ (x^2)^{0,5} = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ |x| = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

$$\log_{(-x)} 25 = -2$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \neq -1 \\ (-x)^{-2} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \neq -1 \\ x^2 = \dfrac{1}{25} \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{1}{5}$.

Тригонометрические уравнения

$\sin x = a$		$\cos x = a$	
$\lvert a\rvert > 1$	$\lvert a\rvert \leqslant 1$	$\lvert a\rvert > 1$	$\lvert a\rvert \leqslant 1$
решений нет	 $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$	решений нет	 $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$

При $\lvert a\rvert \leqslant 1$:

$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}$

$\sin(\arcsin a) = a$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$

При $\lvert a\rvert \leqslant 1$:

$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi$

$\cos(\arccos a) = a$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
 $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$	 $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$

При любом a:

$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$

a	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$

При любом a:

$0 < \operatorname{arcctg} a < \pi$

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$

$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$

Таблица 15. УРАВНЕНИЯ

Частные решения

$\sin x = 0$	$\sin x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$
$x = \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = 2\pi n,$ $n \in Z$

$\sin(f(x)) = a$	$\cos(f(x)) = a$	$\operatorname{tg}(f(x)) = a$
при $\lvert a\rvert < 1$: $\left[\begin{array}{l} f(x) = \arcsin a + 2\pi n \\ f(x) = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{array}\right.$ $n \in Z$	при $\lvert a\rvert < 1$: $f(x) = \pm\arccos a + 2\pi n$ $n \in Z$	при всех a: $f(x) = \operatorname{arctg} a + \pi n$ $n \in Z$

Методы решения тригонометрических уравнений

Тригонометрические уравнения, приводимые к уравнениям от одной тригонометрической функции одной переменной, решаются (как правило) *подстановкой*.

$\sin^2 x + 4\cos x = 2{,}75$ $1 - \cos^2 x + 4\cos x = 2{,}75$ $\cos x = t;\quad \lvert t\rvert \leqslant 1$ $t^2 - 4t + 1{,}75 = 0$ $t = \frac{1}{2};\ t = \frac{7}{2} > 1$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$	$\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4$ $\operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 4$ $\operatorname{tg} x = t$ $t^2 - 4t + 3 = 0$ $t = 1;\ t = 3$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k \end{array}\right.\quad n, k \in Z$

$\cos^2 x + \cos 4x = 0{,}25$

$0{,}5(1 + \cos 2x) + 2\cos^2 2x - 1 = 0{,}25$

$\cos 2x = u;\quad \lvert u\rvert \leqslant 1$

$4u^2 + u - 1{,}5 = 0$

$u = \frac{1}{2};\ u = -\frac{3}{4}$

$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi n;\ x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

Однородные тригонометрические уравнения и уравнения, сводящиеся к ним	
$2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$ $\cos x(2\sin x - \cos x) = 0$ $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ $2\sin x - \cos x = 0$ Корни уравнения $\cos x = 0$ не удовлетворяют этому уравнению. Делим на $\cos x \neq 0$: $2\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$ $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{2}$ $x = \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$5\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 2$ $5\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x =$ $= 2\cos^2 x + 2\sin^2 x$ $3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x = 0$ $\cos x \neq 0$. Делим на $\cos^2 x$: $3\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 4 = 0 \Rightarrow$ $\mathrm{tg}\, x = 1;\ \ \mathrm{tg}\, x = -\frac{4}{3}$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n;\ x = -\mathrm{arctg}\frac{4}{3} + \pi k;$ $n, k \in Z$

Разложение на множители

$\sqrt{2}\sin x \cdot \cos x - 2 = \cos x - 2\sqrt{2}\sin x$

$\sqrt{2}\sin x \cdot \cos x - \cos x - 2 + 2\sqrt{2}\sin x = 0$

$\cos x(\sqrt{2}\sin x - 1) - 2(1 - \sqrt{2}\sin x) = 0$

$(\sqrt{2}\sin x - 1)(\cos x + 2) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin x - 1 = 0\\ \cos x + 2 = 0\end{array}\right.$$

$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n;$

$n \in Z$

$\cos x = -2$, корней нет.

Уравнения, решаемые на основе условия равенства тригонометрических функций

$\sin f(x) = \sin \varphi(x)$	$\cos f(x) = \cos \varphi(x)$	$\mathrm{tg}\, f(x) = \mathrm{tg}\, \varphi(x)$
$\left[\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x) + 2\pi k\\ f(x) = \pi - \varphi(x) + 2\pi n\end{array}\right.$ $n \in Z,\ k \in Z$	$f(x) = \varphi(x) + 2\pi n$ $f(x) = -\varphi(x) + 2\pi k$ $n \in Z,\ k \in Z$	$\left\{\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x) + \pi n\\ \varphi(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi l\end{array}\right.$ $n \in Z,\ l \in Z$

Уравнения с обратными тригонометрическими функциями

$\arcsin x = a$	$\arccos x = a$	$\operatorname{arctg} x = a$	$\operatorname{arcctg} x = a$
$-\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$ $x = \sin a$	$0 \leqslant a \leqslant \pi$ $x = \cos a$	$-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ $x = \operatorname{tg} a$	$0 < a < \pi$ $x = \operatorname{ctg} a$
$a < -\frac{\pi}{2}$ или $a > \frac{\pi}{2}$ решений нет	$a < 0$ или $a > \pi$ решений нет	$a \leqslant -\frac{\pi}{2}$ или $a \geqslant \frac{\pi}{2}$ решений нет	$a \leqslant 0$ или $a \geqslant \pi$ решений нет

Уравнения с параметрами

Решить уравнение $\frac{2x+3}{x-a} = 0$ для каждого значения a.

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ x - a \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x \neq a. \end{cases}$$

Ответ: при $a \neq -\frac{3}{2}$ $x = -\frac{3}{2}$, при $a = -\frac{3}{2}$ решений нет.

Найти все такие значения p, для которых один из корней уравнения $x^2 - 3px + 2p^2 = 0$ равен 1, и для каждого такого значения p найти остальные корни.

Для того чтобы один из корней уравнения был равен 1, необходимо и достаточно, чтобы $1^2 - 3p \cdot 1 + 2p^2 = 0$, т. е. $2p^2 - 3p + 1 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}$.

При $p = 1$ $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

при $p = \frac{1}{2}$ $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ: при $p = 1$ и при $p = \frac{1}{2}$. При $p = 1$ $x_2 = 2$; при $p = \frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{1}{2}$.

Уравнения с параметрами (продолжение)

При каких значениях a уравнение $4^x - (a + 2)\,2^x + 2a = 0$ имеет а) хотя бы одно решение; б) ровно одно решение; в) более одного решения?

Сделаем замену $2^x = t$,

$t^2 - (a + 2) \cdot t + 2a = 0$, $t_1 = a$, $t_2 = 2$.

$2^x = 2$, $x = 1$ при любом a.

$2^x = a$, при $a \leqslant 0$ решений нет; при $a > 0$ $\quad x = \log_2 a$.

Заметим, что при $a = 2$ $x = 1$ совпадает с первым корнем.

Ответ: а) при всех значениях a; б) при $a \leqslant 0$ и $a = 2$; в) при $0 < a < 2$ и $a > 2$.

При каких значениях b уравнения $\sin^2 x - (3 + b)\sin x + 3b = 0$ и $x^2 = b$ равносильны?

Если первое уравнение имеет решение x_0, то оно имеет и бесконечно много решений вида $x_0 + 2\pi k$, т. е. не может быть равносильно уравнению $x^2 = b$, имеющему не более двух решений.

Уравнения равносильны, если они оба не имеют решений.

Уравнение $x^2 = b$ при $b < 0$ не имеет решений, второе уравнение равносильно объединению $\left[\begin{array}{l}\sin x = b\\ \sin x = 3,\end{array}\right.$ не имеющему решений при $b < -1$ или $b > 1$. Таким образом, оба уравнения не имеют решений, т. е. равносильны при $b < -1$.

Ответ: при $b < -1$.

Найти все значения p, при которых сумма действительных корней уравнения $x^2 - px + 3 = 0$ меньше пяти.

При $D \geqslant 0$ $\quad x_1 + x_2 = p$.

$$\begin{cases} p < 5 \\ D \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < 5 \\ p^2 - 12 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow (-\infty; -2\sqrt{3}\,] \cup [\,2\sqrt{3}\,; 5).$$

Ответ: $p \in (-\infty; -2\sqrt{3}\,] \cup [\,2\sqrt{3}\,; 5)$.

Уравнения с параметрами (продолжение)

При каких значениях m уравнения $x^2 + 3x - m = 0$ и $mx^2 + x + 3 = 0$ имеют общий корень? Для каждого такого значения m найти этот корень.

Пусть t — общий корень уравнений. Составим систему двух уравнений с двумя неизвестными (t и m):

$$\begin{cases} t^2 + 3t - m = 0 \\ mt^2 + t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(t+3) = m \\ t + 3 = -mt^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(t+3) = m \\ m = -mt^2 \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t(t+3) = m \\ \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ t = -1 \end{array}\right. \end{cases}$$

При $m = 0$ $\begin{cases} x^2 + 3x = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$ общий корень $x = -3$;

при $t = -1$ $m = (-1)(-1+3) = -2$.

$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 = 0 \\ -2x^2 + x + 3 = 0 \end{cases}$ общий корень $x = -1$.

Ответ: при $m = -2$ $x = -1$; при $m = 0$ $x = -3$.

Найти все пары действительных чисел a и b, при которых уравнение $|x - 1| + |x + 3| = ax + b$ имеет бесконечное множество решений.

$$|x - 1| + |x + 3| = \begin{cases} -2x - 2 & \text{при } x < -3 \\ 4 & \text{при } -3 \leqslant x < 1 \\ 2x + 2 & \text{при } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Уравнение имеет бесконечное множество решений, если $ax + b$ тождественно равно $-2x - 2$, т. е. $a = -2$; $b = -2$.
Аналогично $ax + b$ тождественно равно 4, т. е. $a = 0$; $b = 4$.
Аналогично $a = 2$; $b = 2$. *Ответ*: $(-2; -2)$; $(0; 4)$; $(2; 2)$.

При каких значениях m уравнение $x^2 - mx + 1 = 0$ имеет два корня, расстояние между которыми на числовой оси равно 2?

Уравнение имеет два различных корня, если $D > 0$, т. е. $m^2 - 4 > 0$. Расстояние между корнями на числовой оси равно

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{m - \sqrt{D}}{2} - \frac{m + \sqrt{D}}{2}\right| = \sqrt{D}.$$

Имеем систему: $\begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ \sqrt{m^2 - 4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Ответ: $m = -2\sqrt{2}$, $m = 2\sqrt{2}$.

Таблица 16. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Метод подстановки

$$\begin{cases} x + 5y = 6 \\ x^2 + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6-x}{5} \\ x^2 + 3\cdot\dfrac{6-x}{5} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6-x}{5} \\ 5x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6-x}{5} \\ \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{5} \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{32}{25} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{5}; \frac{32}{25}\right)$, $(1; 1)$.

$$\begin{cases} 2x + y = \pi \\ \cos(3x - 2y) = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - 2x \\ \cos(3x - 2\pi + 4x) = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 7x = 0,5 \\ y = \pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi k}{7} \\ y = \dfrac{19\pi}{21} - \dfrac{4\pi k}{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi n}{7} \\ y = \dfrac{23\pi}{21} - \dfrac{4\pi n}{7} \end{cases} \end{array}\right. \quad n, k \in Z$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi k}{7}; \frac{19\pi}{21} - \frac{4\pi k}{7}\right)$;

$\left(-\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi n}{7}; \frac{23\pi}{21} - \frac{4\pi n}{7}\right)$; $n, k \in Z$.

Таблица 16. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Метод алгебраического сложения

$$\begin{cases} 5x + 2y = 9 & \text{умножим на 3} \\ 7x - 3y = 1 & \text{умножим на 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 6y = 27 \\ 14x - 6y = 2 \end{cases} \overset{\text{сложим уравнения}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 29x = 29 \\ 7x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ответ: (1; 2).

$$\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}75 & \text{сложим уравнения системы} \\ \sin x \sin y = 0{,}25 & \text{вычтем уравнения системы} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = 1 \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = 1 \\ \cos(x + y) = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2\pi k \\ x + y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 2\pi k \\ x + y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 2\pi k \\ x + y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(n + k); \frac{\pi}{6} + \pi(n - k)\right)$;

$\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(n + k); -\frac{\pi}{6} + \pi(n - k)\right)$, $n, k \in Z$.

Дополнительные методы

Применение теоремы Виета

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$$

x, y — корни уравнения:

$a^2 - 5a + 4 = 0.$

$a = 1;\ a = 4.$

Ответ: (1; 4); (4; 1).

Симметрические системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy = -1 \\ x + y - xy = 1 \end{cases}$$

замена: $x + y = p$, $xy = q$

$$\begin{cases} (p^2 - 2q) - 3q = -1 \\ p - q = 1 \end{cases}$$

Сведение к объединению более простых систем

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \\ 3x^2 - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x-4y) = 0 \\ 3x^2 - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x^2 - 2y = 8 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} x - 4y = 0 \\ 3x^2 - 2y = 8 \end{cases} (2) \end{array} \right.$$

$$(1) \begin{cases} x = y \\ 3x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (2;\ 2) \\ (-4/3;\ -4/3) \end{array}$$

$$(2) \begin{cases} x = 4y \\ 24y^2 - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{1 + \sqrt{385}}{12};\ \frac{1 + \sqrt{385}}{48}\right);\ \left(\frac{1 - \sqrt{385}}{12};\ \frac{1 - \sqrt{385}}{48}\right)$$

Использование однородности

$$\begin{cases} 3x^2 - xy + y^2 = 5 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (−3), второе — на 5 и сложим.

$$\begin{cases} -9x^2 + 3xy - 3y^2 = -15 \\ 5x^2 + 10y^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 3xy + 7y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y + x)(7y - 4x) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y + x = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1;\ -1) \\ (-1;\ 1) \end{array} \right. \\ \begin{cases} 7y - 4x = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{7\sqrt{3}}{9};\ \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \\ \left(-\frac{7\sqrt{3}}{9};\ -\frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ответ: (1; −1); (−1; 1); $\left(\frac{7\sqrt{3}}{9};\ \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$; $\left(-\frac{7\sqrt{3}}{9};\ -\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$.

Таблица 17. НЕРАВЕНСТВА

Строгие неравенства	Нестрогие неравенства
Число $a > b$ (a больше b), если разность $(a - b)$ положительное число. Если $a < b$, то $b > a$. В этом случае разность $(a - b)$ отрицательное число.	$a \leqslant b$ $c \geqslant d$

Свойства числовых неравенств

a, b — любые числа	a, b — положительные числа
Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности). Если $a > b$, то $a + c > b + c$ ($c \in R$). Если $a > b$ и c положительное число, то $ac > bc$. Если $a > b$ и c отрицательное число, то $ac < bc$. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.	Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$. Если $a > b > 0$ и $m \in N$, то $a^m > b^m$. Если $a > b > 0$ и $m \in N$, то $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$.

Двойное неравенство ($a < b \leqslant c$)

Сложение двойных неравенств
$a \leqslant b \leqslant c,\ p \leqslant m < q \Rightarrow a + p \leqslant b + m < c + q$
Умножение двойных неравенств с положительными членами
$0 < a < b < c;\ 0 < p < m < q \Rightarrow ap < bm < cq$

Методы доказательства неравенств

Составление разности (если разность двух чисел положительна, то уменьшаемое больше вычитаемого).
Метод использования известных неравенств.
Метод усиления (использование транзитивности).
Использование монотонности функции, применение производной.

Пример. Доказать неравенство: $e^x \geqslant 1 + x$ при $x \geqslant 0$.
Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - 1 - x$. $f'(x) = e^x - 1 > 0$ при $x > 0$. Следовательно, $f(x)$ возрастает на $[0; +\infty)$. Но $f(0) = 0$. Значит, $f(x) > 0$ при $x > 0$. При $x = 0$ неравенство обращается в равенство. Итак, $e^x - 1 - x \geqslant 0$, то есть $e^x \geqslant 1 + x$ при $x \geqslant 0$.

Сравнение средних величин положительных чисел
($a \geqslant b > 0$, $a_i > 0$, $n \in N$)

Среднее арифметическое	двух чисел $\frac{a+b}{2}$	n чисел $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$
Среднее геометрическое	двух чисел $\sqrt{ab}$	n чисел $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$
Среднее гармоническое	двух чисел $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$	n чисел $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$
Среднее квадратичное	двух чисел $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	n чисел $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$

$$a \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geqslant b$$

(верно и для n чисел)

Линейные неравенства
(приводимые к виду $ax > b$; $ax \geqslant b$; $ax < b$; $ax \leqslant b$)

$3 \cdot x > -6$ $x > -2$ $x \in (-2; +\infty)$	$-5 \cdot x \geqslant 1$ $x \leqslant -\frac{1}{5}$ $x \in (-\infty; -\frac{1}{5}]$	$0 \cdot x < 2$ $x \in R$	$0 \cdot x > 8$ $x \in \{\varnothing\}$

$(\sqrt{5} - \sqrt{7})x > (\sqrt{5} - \sqrt{7})$

$x < 1$, так как $\sqrt{5} - \sqrt{7} < 0$

$x \in (-\infty; 1)$

Таблица 17. НЕРАВЕНСТВА

Квадратные неравенства

(приводимые к виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $a > 0$)

Для решения квадратного неравенства вычислим дискриминант $D = b^2 - 4ac$ и определим корни квадратного трехчлена.

Неравенство	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in R$	$x \in (-\infty; x_0) \cup$ $\cup (x_0; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_2; +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$	решений нет	решений нет	$x \in (x_1; x_2)$

Простейшие иррациональные неравенства

	$\sqrt{x} < a$	$\sqrt{x} > a$
$a < 0$	решений нет	$x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0; +\infty)$
$a = 0$	решений нет	$x > 0 \Leftrightarrow x \in (0; +\infty)$
$a > 0$	$0 \leqslant x < a^2$, $x \in [0; a^2)$	$x > a^2 \Leftrightarrow x \in (a^2; +\infty)$

$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$
равносильно системе $\begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$	равносильно объединению систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$	равносильно системе $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$

Простейшие показательные неравенства

	$a^x < m$	$a^x > m$	$a^{f(x)} < m$	$a^{f(x)} > m$
$m \leqslant 0$; $a > 0$, $a \neq 1$	нет решений	$x \in R$	нет решений	$x \in D(f)$
$m > 0$; $a > 1$	$x < \log_a m$	$x > \log_a m$	$f(x) < \log_a m$	$f(x) > \log_a m$
$m > 0$; $0 < a < 1$	$x > \log_a m$	$x < \log_a m$	$f(x) > \log_a m$	$f(x) < \log_a m$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	при $a > 1$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ при $0 < a < 1$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$			

Простейшие логарифмические неравенства

$m \in R$	$\log_a x < m$	$\log_a x > m$	$\log_a f(x) < m$	$\log_a f(x) > m$
$a > 1$	$\begin{cases} x < a^m \\ x > 0 \end{cases}$	$x > a^m$	$\begin{cases} f(x) < a^m \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$f(x) > a^m$
$0 < a < 1$	$x > a^m$	$\begin{cases} x < a^m \\ x > 0 \end{cases}$	$f(x) > a^m$	$\begin{cases} f(x) < a^m \\ f(x) > 0 \end{cases}$

$\log_a f(x) < \log_a g(x)$		$\log_{H(x)} f(x) < \log_{H(x)} g(x)$
при $a > 1$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	при $0 < a < 1$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	равносильно объединению систем неравенств: $\begin{cases} H(x) > 1 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} H(x) > 0 \\ H(x) < 1 \\ f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Примеры простейших тригонометрических неравенств

$\sin x < -1{,}3$	$\sin x > -1{,}3$	$\sin x < \sqrt{1{,}3}$	$\sin x > \sqrt{1{,}3}$
решений нет, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$	$x \in R$	$x \in R$, так как $\sin x \leqslant 1 < \sqrt{1{,}3}$	решений нет

$\sin x < -0{,}5$	$\sin x > -0{,}5$
$x \in \left(2\pi n - \frac{5\pi}{6};\ 2\pi n - \frac{\pi}{6}\right)$, $n \in Z$	$x \in \left(2\pi n - \frac{\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$

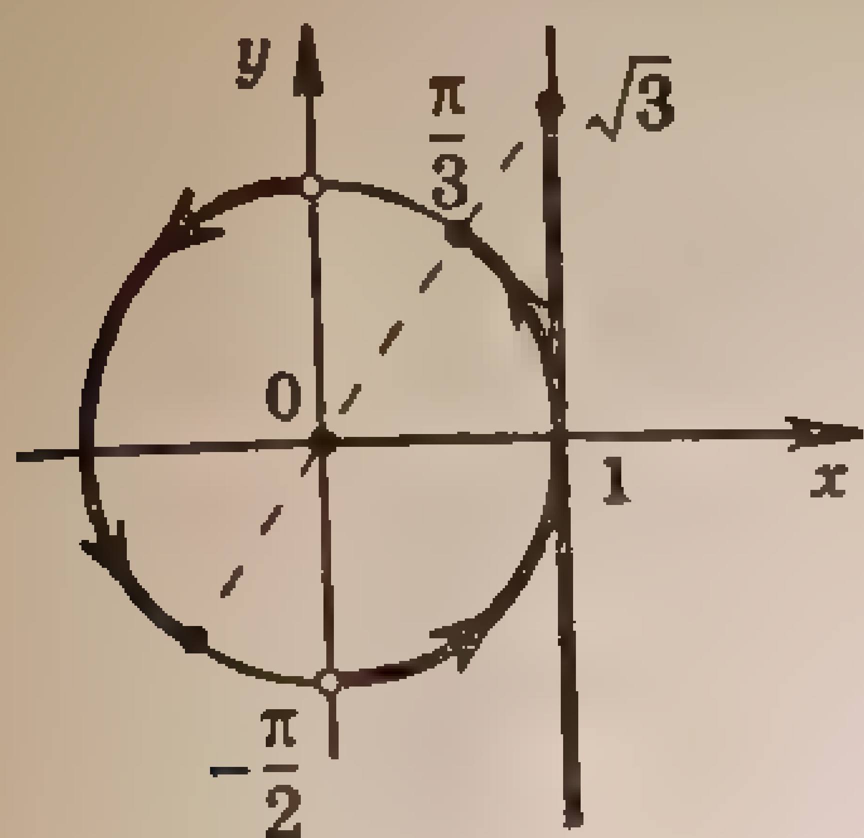
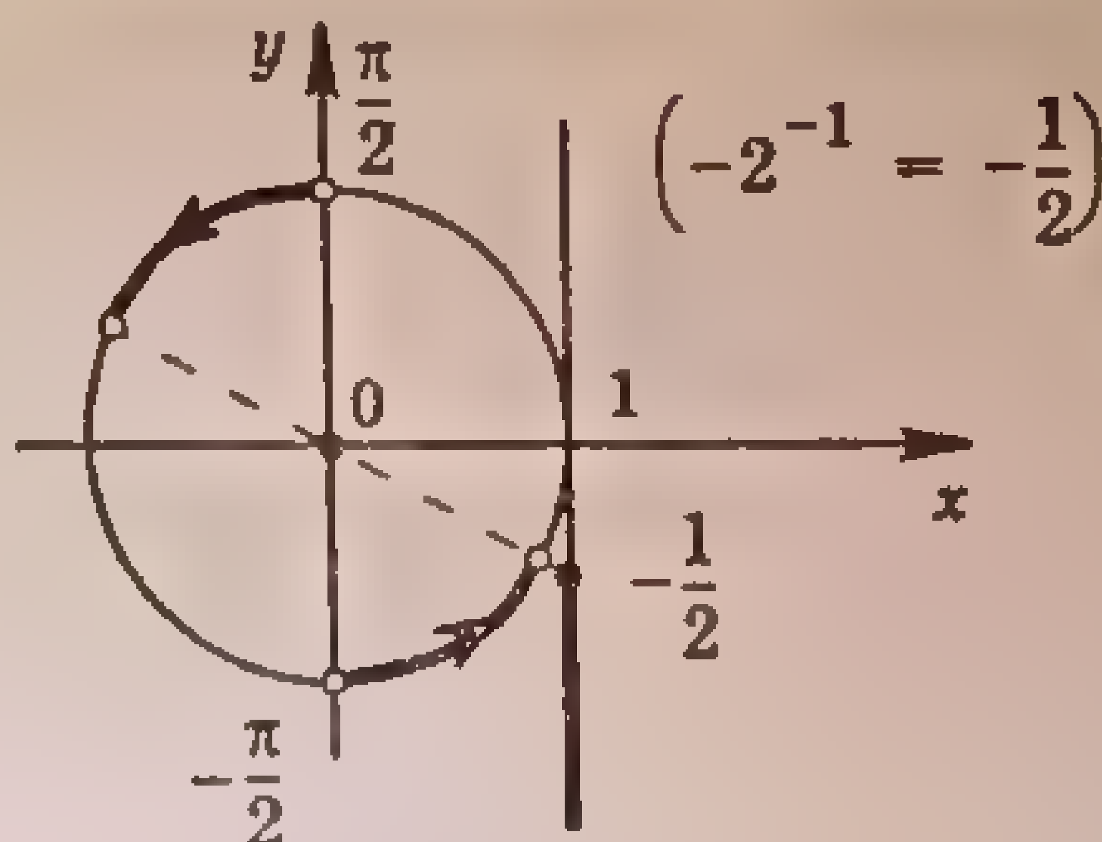
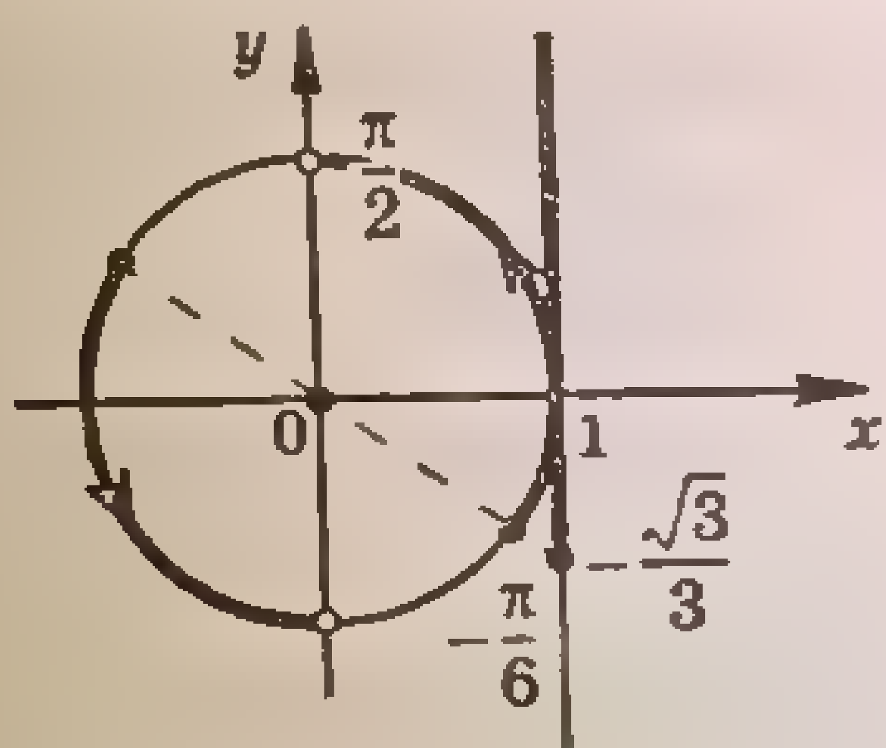
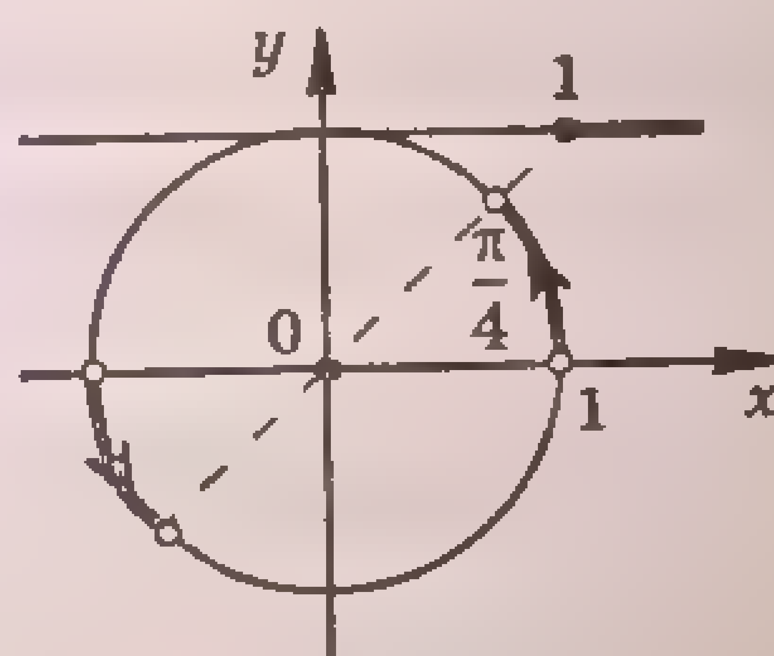
Таблица 17. НЕРАВЕНСТВА

$\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$
$x \in \left(2\pi n + \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} + 2\pi n\right)$ $n \in Z$	$x \in \left(2\pi n + \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$ $n \in Z$

$\cos x < -3^{0,7}$	$\cos x < \ln 3$	$\cos x > -\frac{\pi}{3}$	$\cos x > e^{0,2}$
решений нет	$x \in R$, так как $\cos x \leqslant 1 < \ln 3$	$x \in R$, так как $\cos x \geqslant -1 > -\frac{\pi}{3}$	решений нет, так как $e^{0,2} > 1$

$\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos x < 0{,}5$
$x \in \left(2\pi n + \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$ $n \in Z$	$x \in \left(2\pi n + \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$ $n \in Z$

$\cos x > 0$	$\cos x > 0{,}7$
$x \in \left(2\pi n - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ $n \in Z$	$x \in (2\pi n - \arccos 0{,}7;$ $\arccos 0{,}7 + 2\pi n)$ $n \in Z$

$\operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}$	$\operatorname{tg} x < -2^{-1}$
	
$x \in \left(\pi n - \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{3} + \pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}$	$x \in \left(\pi n - \frac{\pi}{2};\ \pi n - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right),$ $n \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{ctg} x > 1$
	
$x \in \left[\pi n - \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$	$x \in \left(\pi n;\ \frac{\pi}{4} + \pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$

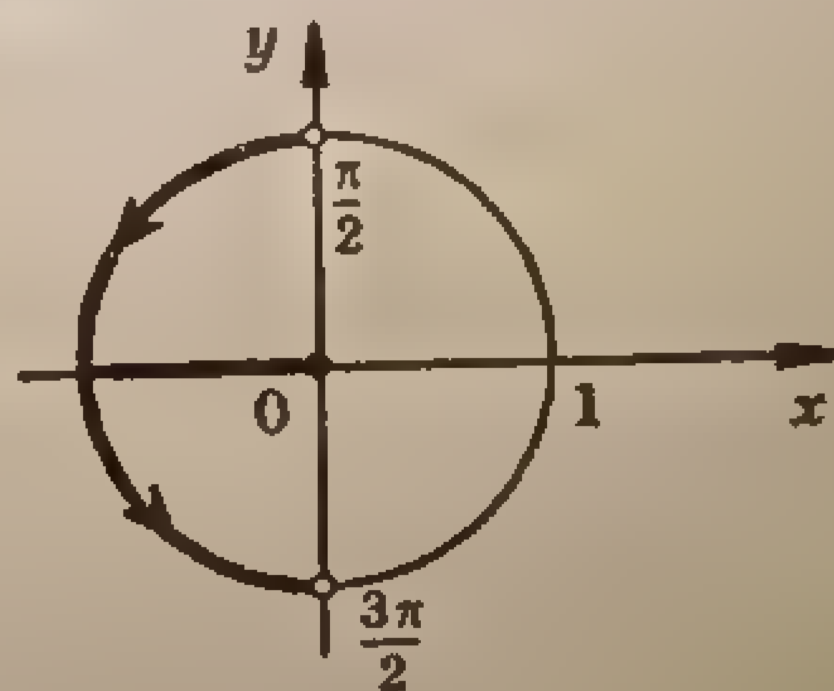
Более сложные примеры
решения тригонометрических неравенств

$$\cos\left(2x - \frac{3\pi}{8}\right) < 0$$

$t = 2x - \frac{3\pi}{8}$

$\cos t < 0$

$t \in \left(2\pi n + \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$



$$2\pi n + \frac{\pi}{2} < 2x - \frac{3\pi}{8} < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

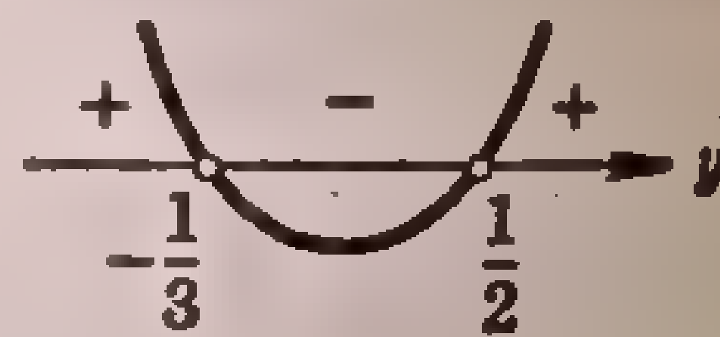
$$\pi n + \frac{7\pi}{16} < x < \frac{15\pi}{16} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$$

$\sin x \geqslant \cos x$	$\mathrm{tg}^2 x \leqslant 3$
$2\pi n + \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$\lvert \mathrm{tg}\, x \rvert \leqslant \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}\, x \leqslant \sqrt{3} \\ \mathrm{tg}\, x \geqslant -\sqrt{3} \end{cases}$ $x \in \left[\pi n - \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3} + \pi n\right],\ n \in Z$

$6\cos^2 x - \cos x - 1 < 0$

Пусть $y = \cos x$. Тогда

$$\begin{cases} 6y^2 - y - 1 < 0 \\ \lvert y \rvert \leqslant 1 \end{cases}$$



$$-\frac{1}{3} < y < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{3} < \cos x < \frac{1}{2}$$

$$x \in \left(2\pi n - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right);\ 2\pi n - \arccos\frac{1}{2}\right) \cup$$

$$\cup \left(2\pi n + \arccos\frac{1}{2};\ 2\pi n + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$



или

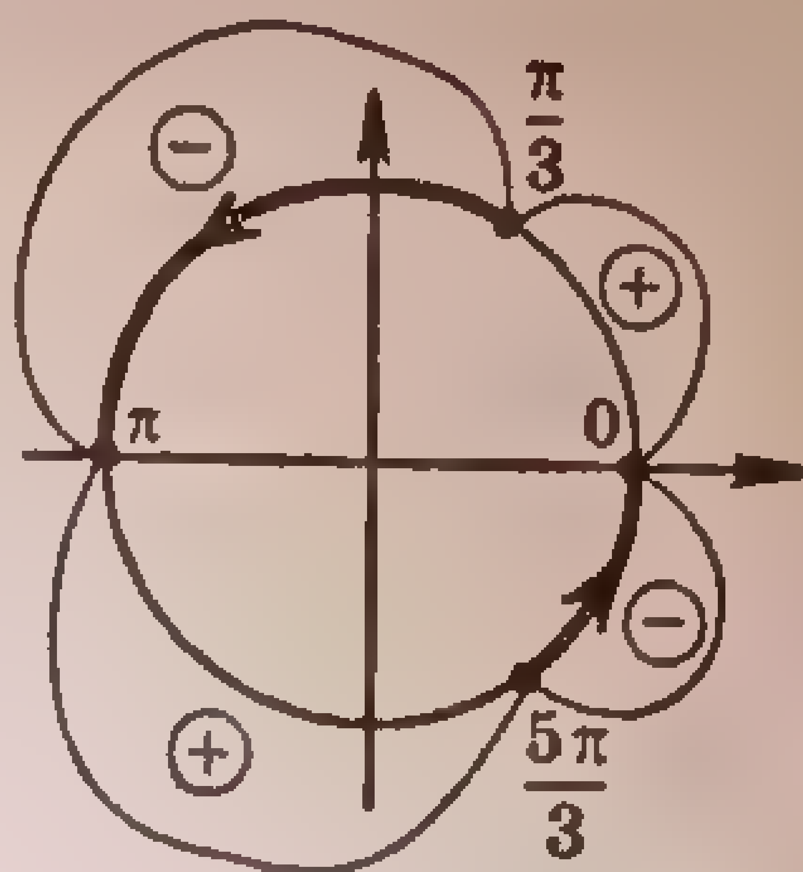
$$x \in \left(2\pi n - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right);\ 2\pi n - \frac{\pi}{3}\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n\right),\ n \in Z$$

$\sin x - \sin 2x \leqslant 0$

$\sin x\,(1 - 2\cos x) \leqslant 0$

Используем метод интервалов на тригонометрической окружности, считая $x \in [0;\ 2\pi)$.



$F(x) = \sin x\,(1 - 2\cos x)$

$F(x) = 0 \Rightarrow x = 0;\ \pi;\ \dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{5\pi}{3}.$

$x \in \left[2\pi n + \dfrac{\pi}{3};\ \pi + 2\pi n\right] \cup$

$\cup \left[2\pi n + \dfrac{5\pi}{3};\ 2\pi + 2\pi n\right],\ n \in Z$

Примеры неравенств

с обратными тригонометрическими функциями

$\arccos x < -5$ решений нет, так как $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$	$\text{arrcos}\ x > -4$ $x \in [-1;\ 1]$	$\arccos x < \dfrac{\pi}{3}$ $x \in (0{,}5;\ 1]$	$\arccos x > 1$ $x \in [-1;\ \cos 1)$
$\arcsin x < \pi$ $x \in [-1;\ 1]$	$\arcsin x < -1{,}7$ решений нет, так как $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$	$\arcsin x \leqslant -\dfrac{\pi}{6}$ $x \in [-1;\ -0{,}5]$	$\arcsin x > 0$ $x \in (0;\ 1]$
$\text{arctg}\ x < 2$ $x \in R$, так как $-\dfrac{\pi}{2} < \text{arctg}\ x < \dfrac{\pi}{2}$	$\text{arctg}\ x > 5$ решений нет	$\text{arctg}\ x \leqslant \dfrac{\pi}{7}$ $x \in \left(-\infty;\ \text{tg}\,\dfrac{\pi}{7}\right]$	$\text{arctg}\ x \leqslant 0$ $x \in (-\infty;\ 0]$

Метод интервалов (промежутков)

Методом интервалов решают неравенства, приведенные к виду $F(x) > 0$ или $F(x) < 0$, ($F(x) \geqslant 0$ или $F(x) \leqslant 0$).
Метод основан на том, что непрерывная на промежутке функция может менять знак только в тех точках, где ее значение равно нулю (но может и не менять).

Алгоритм применения метода

Найдем $D(F(x))$ и промежутки, на которых $F(x)$ непрерывна.
Найдем нули функции $F(x)$ — значения x, при которых $F(x) = 0$.
Нанесем на числовую ось найденные промежутки и нули.
Определим интервалы знакопостоянства и в каждом из них поставим найденный подсчетом или рассуждением знак.
Выпишем ответ.

Примеры

$x(x-4)(x+5)^2 > 0$

Рассмотрим функцию $F(x) = x(x-4)(x+5)^2$.
$D(F) = R$, функция непрерывна на R.
$F(x) = 0$ в точках $x = 0$; $x = 4$; $x = -5$.
$F(-6) > 0$; $F(-1) > 0$; $F(1) < 0$; $F(5) > 0$.
Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (4; \infty)$.



$x(x-4)(x+5)^2 \leqslant 0$ при $x \in \{-5\} \cup [0; 4]$.

$\dfrac{x(x+2)}{x-5} \leqslant 0$. Рассмотрим функцию $F(x) = \dfrac{x(x+2)}{x-5}$.
$D(F) = (-\infty; 5) \cup (5; \infty)$.
$F(x) = 0$ в точках $x = 0$; $x = -2$.
$F(-3) < 0$; $F(-1) > 0$; $F(1) < 0$; $F(6) > 0$.
Ответ: $(-\infty; -2] \cup [0; 5)$.

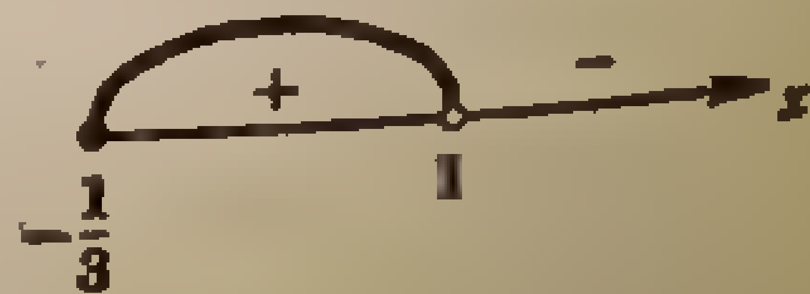


$\sqrt{3x+1} > 2x$. Приведем неравенство к виду: $\sqrt{3x+1} - 2x > 0$.

$F(x) = \sqrt{3x+1} - 2x$.

$D(F) = [-\frac{1}{3}; +\infty)$. Найдем нули этой функции.

$$\sqrt{3x+1} - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 3x+1 = 4x^2 \end{cases}$$



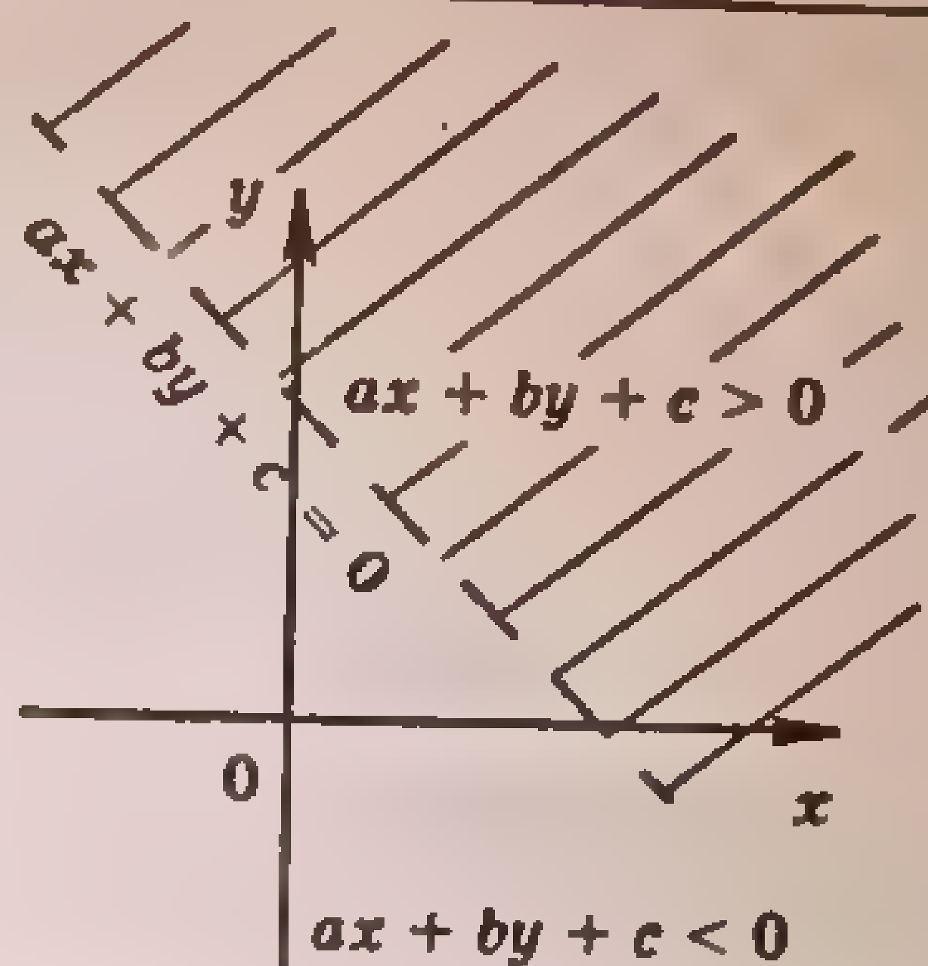
$F(x) = 0$ при $x = 1$. $F(0) > 0$; $F(5) < 0$.

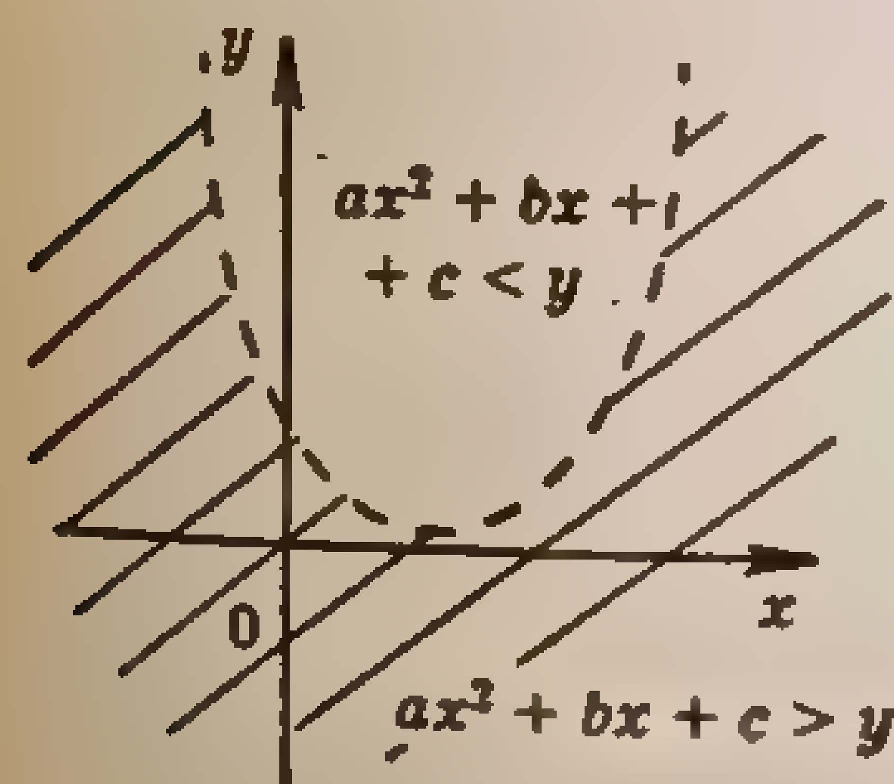
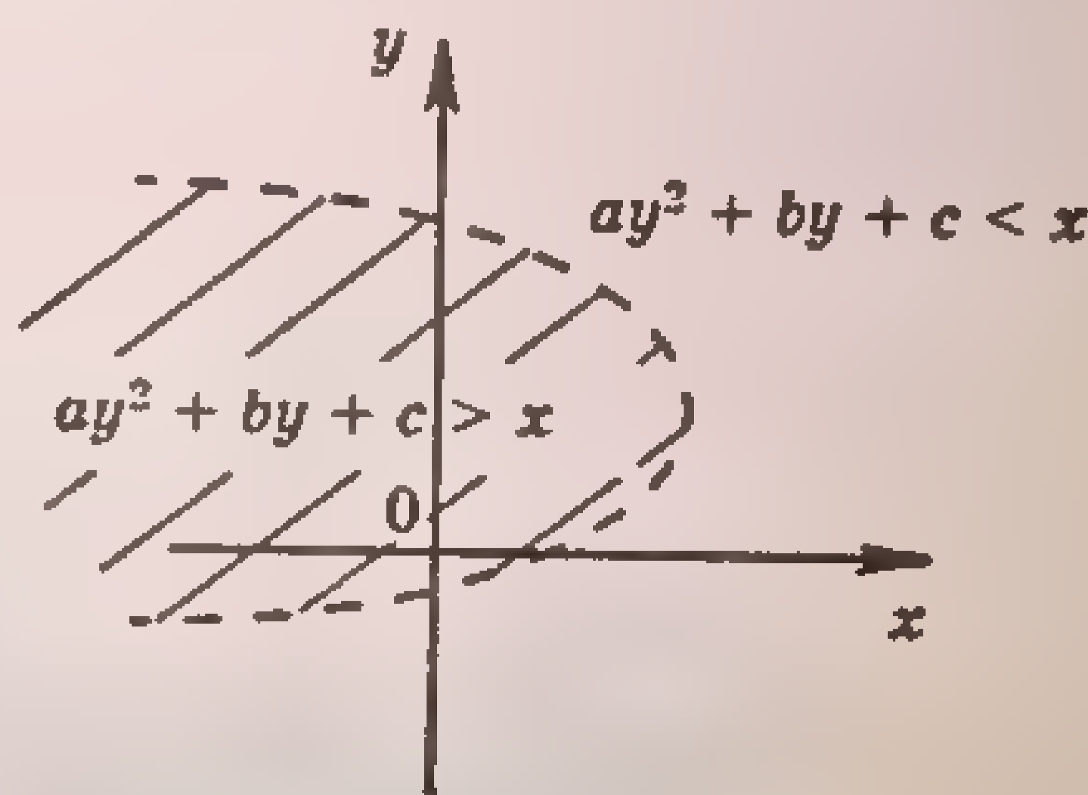
Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Таблица 18. НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

$ax + by + c > 0$ и $ax + by + c < 0$ — полуплоскости ($a^2 + b^2 \neq 0$)

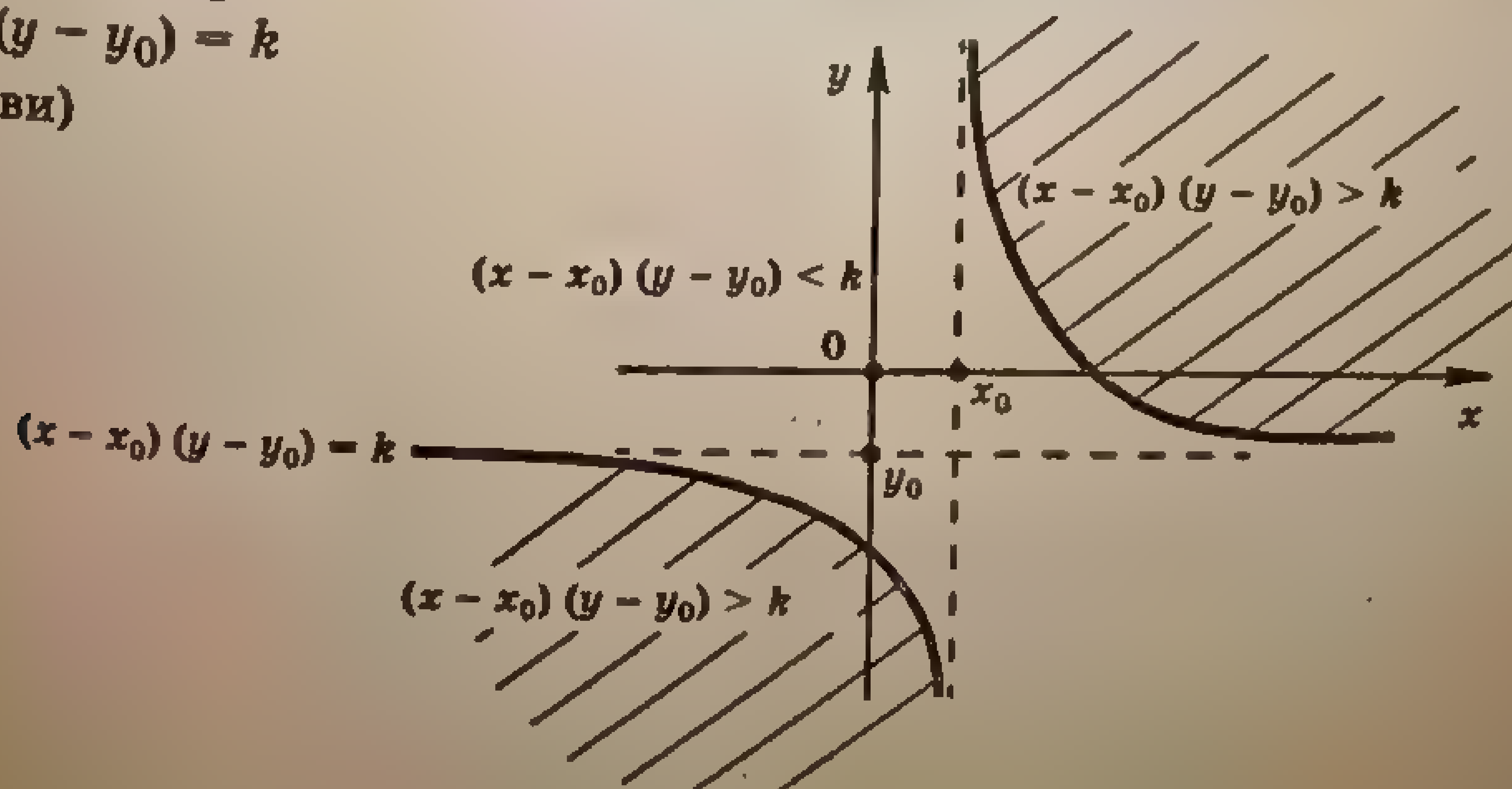
граница — прямая
$ax + by + c = 0$



$ax^2 + bx + c > y$ и $ax^2 + bx + c < y$	$ay^2 + by + c > x$ и $ay^2 + by + c < x$
граница — парабола $ax^2 + bx + c = 0$ 	 граница — парабола $ay^2 + by + c = x$

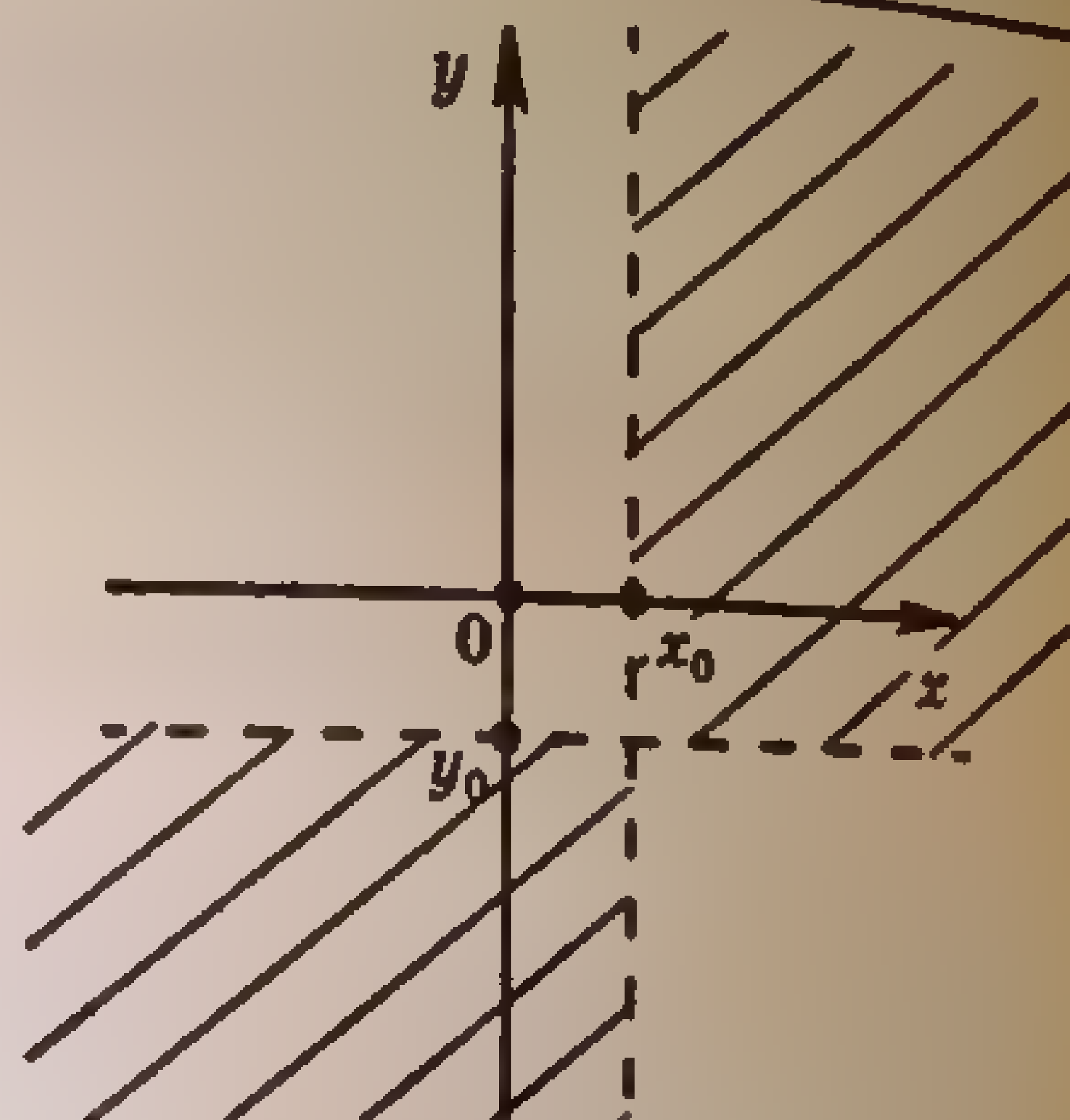
$(x - x_0)(y - y_0) \geqslant k$ и $(x - x_0)(y - y_0) < k$ ($k \neq 0$)

граница — гипербола
$(x - x_0)(y - y_0) = k$
(две ветви)



$(x - x_0)(y - y_0) > 0$ и $(x - x_0)(y - y_0) < 0$ $(k = 0)$

граница — две прямые
$x = x_0$ и $y = y_0$



$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geqslant m$ и $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < m$; $(m > 0)$

граница — окружность
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = m$
$\sqrt{m}$ — радиус окружности

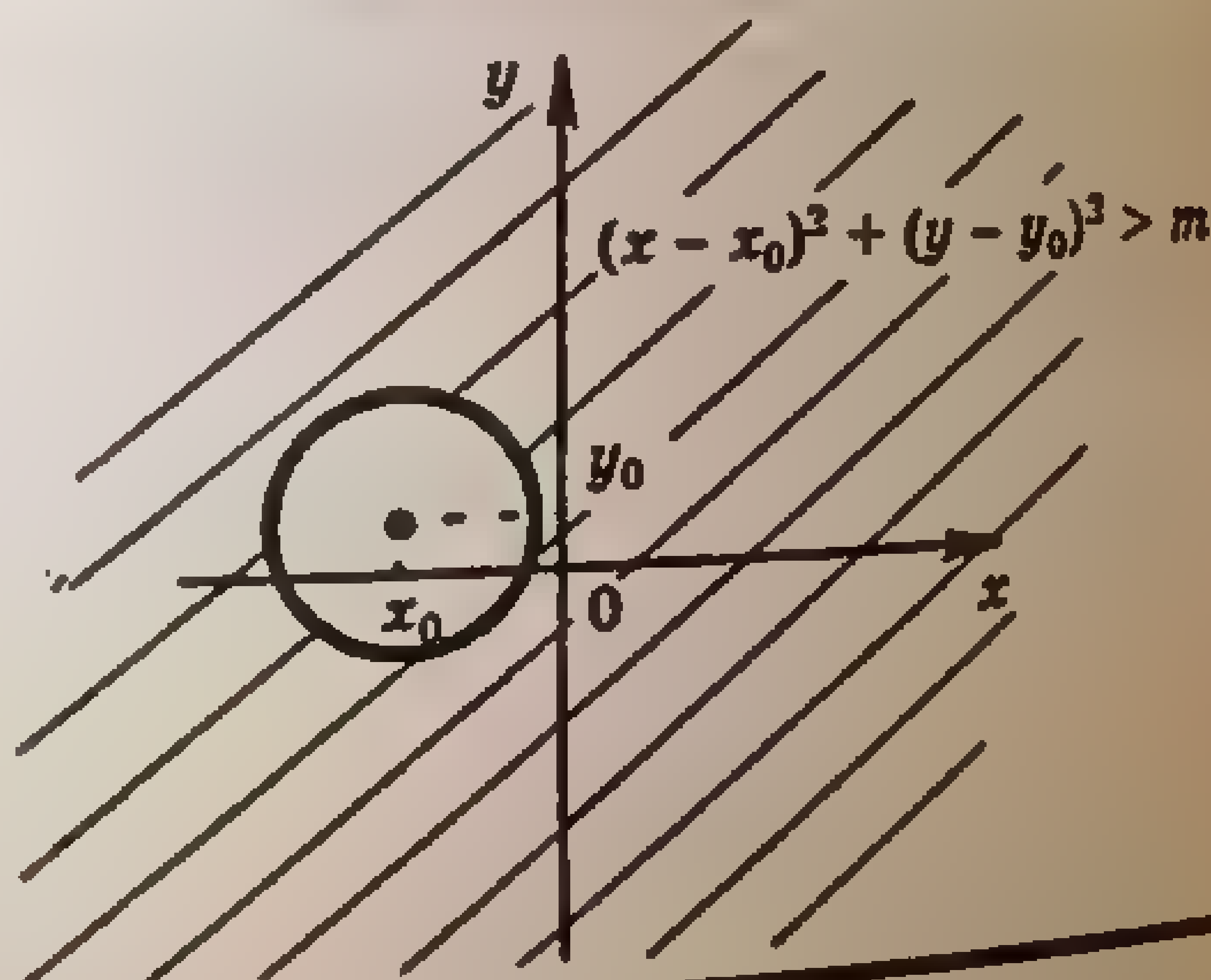


Таблица 19. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

Необходимое условие дифференцируемости функции

Для того чтобы функция f была дифференцируема (имела производную) в точке x_0, необходимо (но недостаточно), чтобы она была непрерывна в этой точке (т.е. $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) \to 0$).

Примеры нахождения производной функции f по определению

$f(x) = x^2$ $x_0 = 2$	$f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $x_0 \neq 0$	$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}}{\Delta x} =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\left(\sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}\right)\Delta x} = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_0^2}}$
$f(x) = \sin x$ $x_0 \in R$	$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x_0$
$f(x) = \lvert x \rvert \cdot x^2$ $x_0 = -2$	$f'(-2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\lvert -2 + \Delta x \rvert \cdot (-2 + \Delta x)^2 - 8}{\Delta x} =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(2 - \Delta x)(-2 + \Delta x)^2 - 8}{\Delta x} = -12$

Таблица 19. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пример *непрерывной, не дифференцируемой* в точке x_0 функции

$f(x) = \|x - 2\|$ $x_0 = 2$	$f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\|(2 + \Delta x) - 2\| - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\|\Delta x\|}{\Delta x}$ предел не существует, $f'(2)$ не существует.
$f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ $x_0 = 1$	$f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(1 + \Delta x) - 1} - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty$, $f'(1)$ не существует.

Вторая производная	Производные высших порядков
$f''(x) = (f'(x))'$	$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$
$(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$	$(\sqrt{x})''' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'' = \left(-\frac{1}{4}x^{-3/2}\right)' =$ $= \frac{3}{8}x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$

Табличное дифференцирование		Производная сложной функции $(f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'(x)$
$(c)' = 0$,	$c \in R$ (константа)	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$*
$(x)' = 1$,	$x \in R$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(x^n)' = nx^{n-1}$,	$n \in N$, $x \in R$; или $-n \in N$, $x \neq 0$; или $n \notin Z$, $x > 0$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$,	$x \in R$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$,	$x \in R$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,	$x \neq \pi k$, $k \in Z$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$,	$x \in (0; +\infty)$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$,	$x \in (0; +\infty)$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$,	$x \in R$	
$(a^x)' = a^x \ln a$,	$x \in R$	* $u = u(x)$

Производная обратной функции

Функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ взаимообратны.

$f(a) = b \Leftrightarrow a = \varphi(b)$

$$\boxed{f'(a) \cdot \varphi'(b) = 1}$$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$	$(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$	$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Основные формулы	*Следствия из основных формул*
$(u+v)' = u' + v'$	$(u-v)' = u' - v'$
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$

Примеры

$(\cos \sqrt{x})' = -\sin \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$;

$((2x^2 - x + 1)^{10})' = 10 \cdot (2x^2 - x + 1)^9 \cdot (2x^2 - x + 1)' =$
$= 10 \cdot (2x^2 - x + 1)^9 \cdot (4x - 1)$.

Физический смысл производной	**Геометрический смысл производной**
Пусть $s = s(t)$ — зависимость пути от времени, тогда: $v = v(t) = s'(t)$ *Скорость — производная пути по времени.* $a = a(t) = v'(t) = s''(t)$ *Ускорение — производная скорости по времени* (вторая производная пути по времени).	Касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 называется прямая, задаваемая уравнением: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ $f'(x_0) = \mathrm{tg}\, \alpha_{кас} = k_{кас}$ *Значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.*

Касательная к графику функции

Уравнение касательной (не вертикальной) к графику функции $y = f(x)$ в точке графика с абсциссой x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Если функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0, но непрерывна в этой точке, то у графика функции в этой точке либо вообще нет касательной, либо есть вертикальная касательная.

$y = |x|$ не имеет касательной в точке графика с абсциссой $x = 0$.

$y = \sqrt[3]{x}$ имеет в точке графика с абсциссой $x = 0$ вертикальную касательную $x = 0$.

Примеры решения задач на составление уравнения касательной

Составить уравнение касательной к кривой $y = x^3 - x^2$ в точке графика с абсциссой $x_0 = 1$.

Координаты точки касания $x_0 = 1$; $y_0 = 1^3 - 1^2 = 0$.

$y' = 3x^2 - 2x \Rightarrow k_{кас} = y'(1) = 1$.

Уравнение касательной: $y = 0 + 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$.

Составить уравнение касательной к кривой $f(x) = (x^2 + 6x + 3)/2$, не пересекающей прямую $y = 2x + 5$.

Так как касательная не пересекает прямую $y = 2x + 5$, значит, она параллельна касательной. Следовательно, $f'(x_0) = 2$. Но $f'(x) = x + 3$. Отсюда $x_0 + 3 = 2$ и $x_0 = -1$. Ордината точки касания y_0 равна $((-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 3)/2 = -1$. Координаты точки касания $(-1; -1)$.

Уравнение касательной $y = -1 + 2(x + 1)$ или $\boxed{y = 2x + 1}$.

Составить уравнение касательной к кривой $y = x^3$, проходящей через точку $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$. Пусть $(x_0; y_0)$ — точка касания. Тогда $y_0 = x_0^3$; $k_{кас} = 3x_0^2$. Уравнение касательной $y = x_0^3 + 3x_0^2(x - x_0)$. Точка $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$ лежит на касательной. Поэтому $-1 = x_0^3 + 3x_0^2\left(\frac{1}{3} - x_0\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_0^3 - x_0^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$.

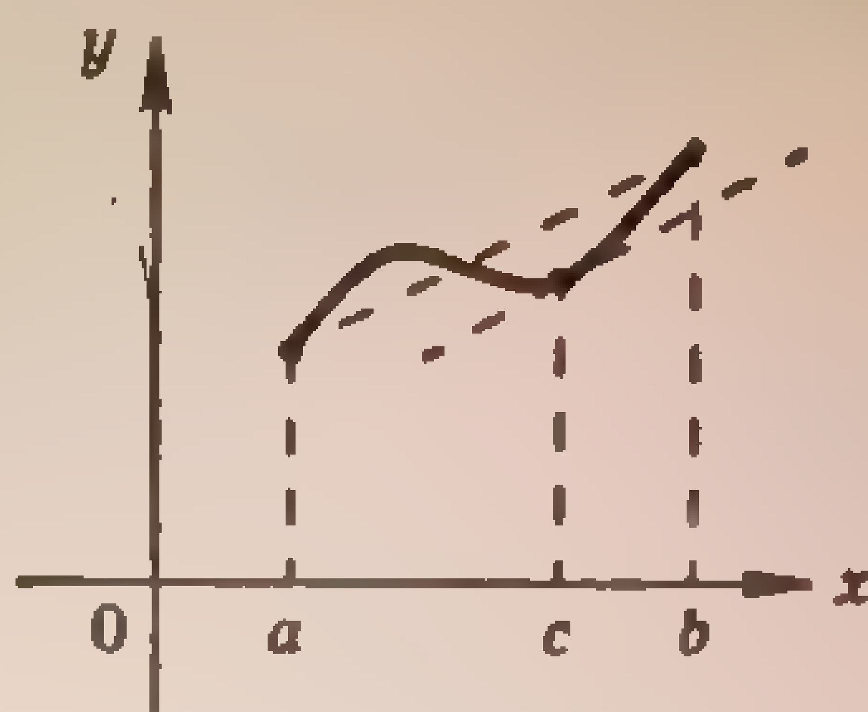
Уравнение касательной $y = 1 + 3(x - 1)$ или $\boxed{y = 3x - 2}$.

Исследование функции при помощи производной

Монотонность функции

Теорема Лагранжа

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$, то существует $c \in (a; b)$ такое, что $f(a) - f(b) = f'(c) \cdot (a - b)$.



(Заметим, что таких точек c на $(a; b)$ может быть и более одной.)

Для исследования функции $f(x)$ на монотонность можно исследовать ее производную на знакопостоянство.

Если $f'(x) > 0$ на $(a; b)$, то $f(x)$ возрастает на $(a; b)$. Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то $f(x)$ возрастает на $[a; b]$.	Если $f'(x) < 0$ на $(a; b)$, то $f(x)$ убывает на $(a; b)$. Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то $f(x)$ убывает на $[a; b]$.
$f(x) = x^2 - 6x + 1$; $f'(x) = 2x - 6 > 0$ при $x > 3 \Rightarrow$ $f(x)$ возрастает на $[3; +\infty)$.	$f(x) = \sqrt{-x}$; $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} < 0$ при $x < 0 \Rightarrow$ $f(x)$ убывает на $(-\infty; 0]$.
Если $f(x)$ возрастает и дифференцируема на $[a; b]$, то $f'(x) \geqslant 0$.	Если $f(x)$ убывает и дифференцируема на $[a; b]$, то $f'(x) \leqslant 0$.

Критические точки функции

Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* функции.

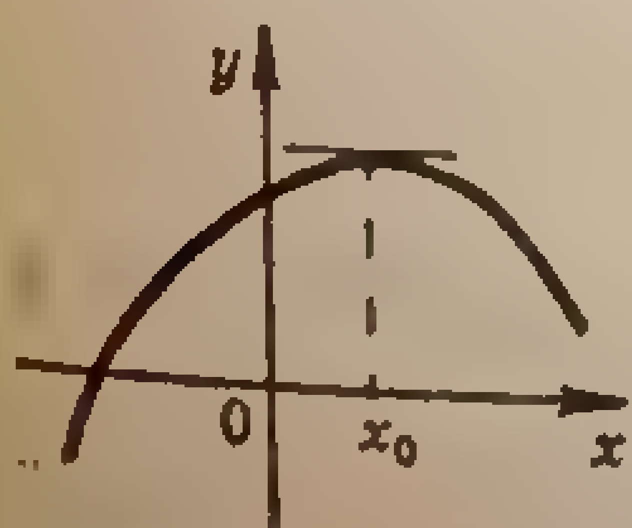
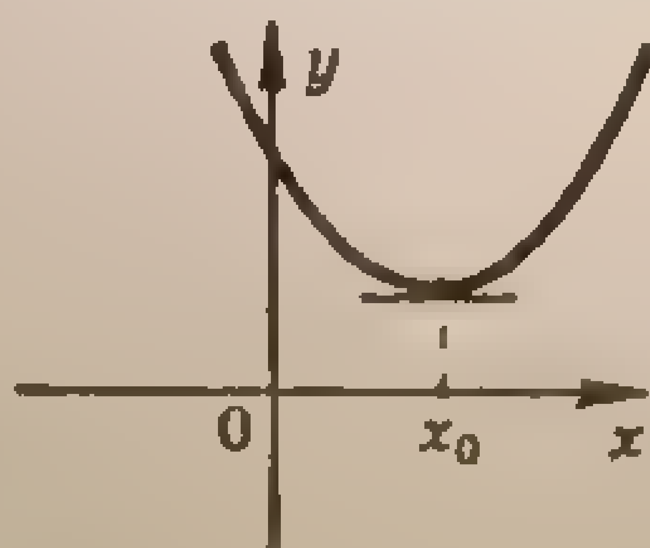
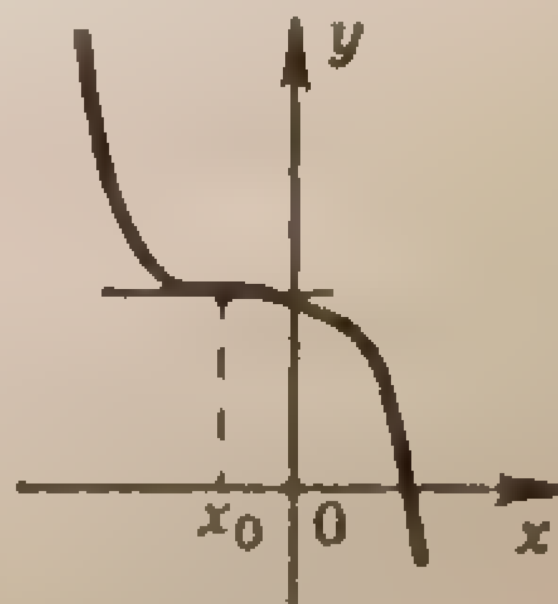
 $f'(x_0) = 0$; x_0 – крит. точка; $f(x_0) = f_{max}$.	 $f'(x_0) = 0$; x_0 – крит. точка; $f(x_0) = f_{min}$.	 $f'(x_0) = 0$; x_0 – крит. точка; $f(x_0)$ не является экстремумом.

Таблица 19. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

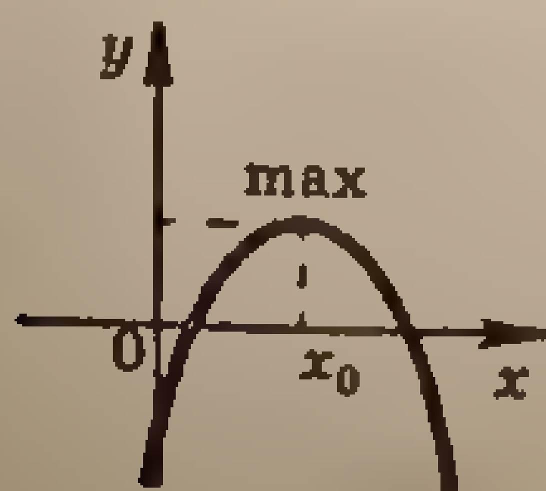
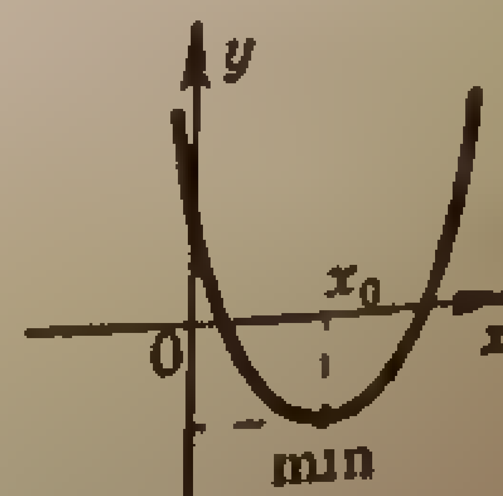
Критические точки (примеры)

$f'(x_0)$ не существует; x_0 – крит. точка; $f(x_0)$ не является экстремумом.	$f'(x_0)$ не существует; x_0 – крит. точка; $f(x_0) = f_{\min}$.	Нет критических точек; $x_0 = 0$ не является внутренней точкой области определения.
Нет критических точек; x_0 — точка разрыва.	$f'(x) = 0$ при всех $x \in (-3; 4)$; $f'(-3)$, $f'(4)$ не существуют; все $x \in [-3; 4]$ критические точки.	$f'(x_0)$ не существует; x_0 — крит. точка; $f(x_0) = f_{\min}$.

Экстремумы

$x_0 \in D(f)$ — точка *максимума* $f(x)$, если существует $\delta > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f(x_0) \geqslant f(x)$	$x_0 \in D(f)$ — точка *минимума* $f(x)$, если существует $\delta > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f(x_0) \leqslant f(x)$

Точки максимума и минимума функции называются ее точками экстремума, а значения в них — экстремумами (максимумами или минимумами).

$f'(x_0) = 0$ при $x < x_0$ $f'(x) > 0$ при $x > x_0$ $f'(x) < 0$ 	$f'(x_0) = 0$ при $x < x_0$ $f'(x) < 0$ при $x > x_0$ $f'(x) > 0$ 

Примеры критических точек различных функций

1) $y = |x|$; $x_0 = 0$; $y'(0)$ не существует; $y(0) = 0$ — минимум.

2) $y = x^2$; $x_0 = 0$; $y'(0) = 0$; $y(0) = 0$ — минимум.

3) $y = x^3$; $x_0 = 0$; $y'(0) = 0$; экстремумов нет.

4) $y = 2x - |x|$; $x_0 = 0$; $y'(0)$ — не существует; экстремумов нет.

Примеры исследования функций на монотонность

$f(x) = x^3 + x^2 + x - 5$;
$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ при $x \in R$;
$f(x)$ возрастает на R.

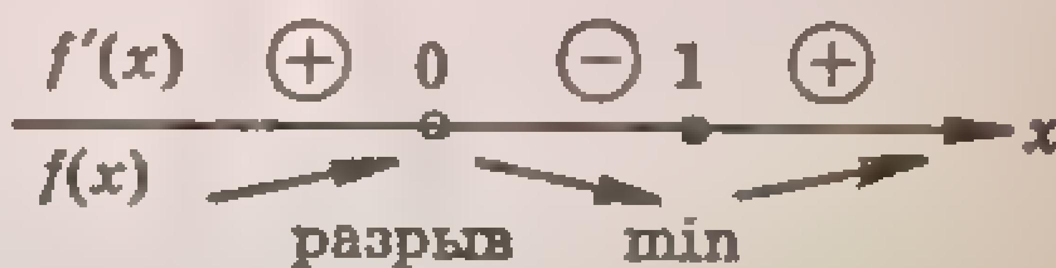


$f(x) = x^3 - 3x$;
$f'(x) = 3(x - 1)(x + 1) = 0$ при $x = -1$ и $x = 1$;
$f(x)$ возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$;
$f(x)$ убывает на $[-1; 1]$.



$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$; $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$;
$f'(x) = 0$ при $x = 1$;

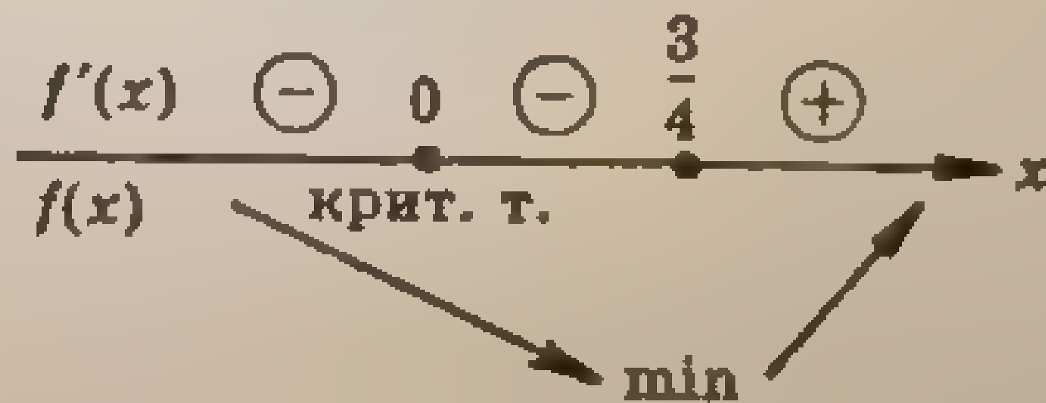
$f(x)$ возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $[1; +\infty)$;
$f(x)$ убывает на $(0; 1]$.



$f(x) = x^4 - x^3$;
$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$;

$f(x)$ возрастает на $\left[\frac{3}{4};\ +\infty\right)$;

$f(x)$ убывает на $\left(-\infty;\ \frac{3}{4}\right]$.



$f(x) = x + \frac{1}{x}$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$;
$f(x)$ возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$;
$f(x)$ убывает на $[-1; 0)$ и на $(0; 1]$.



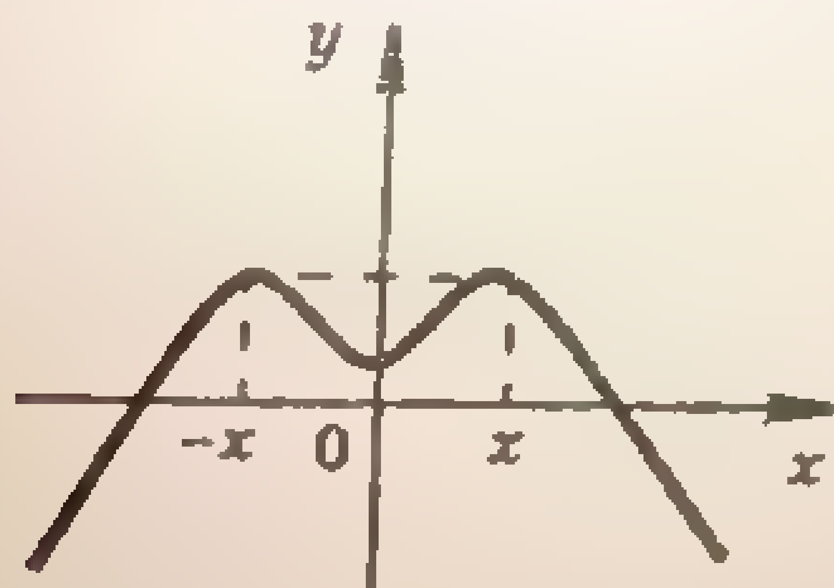
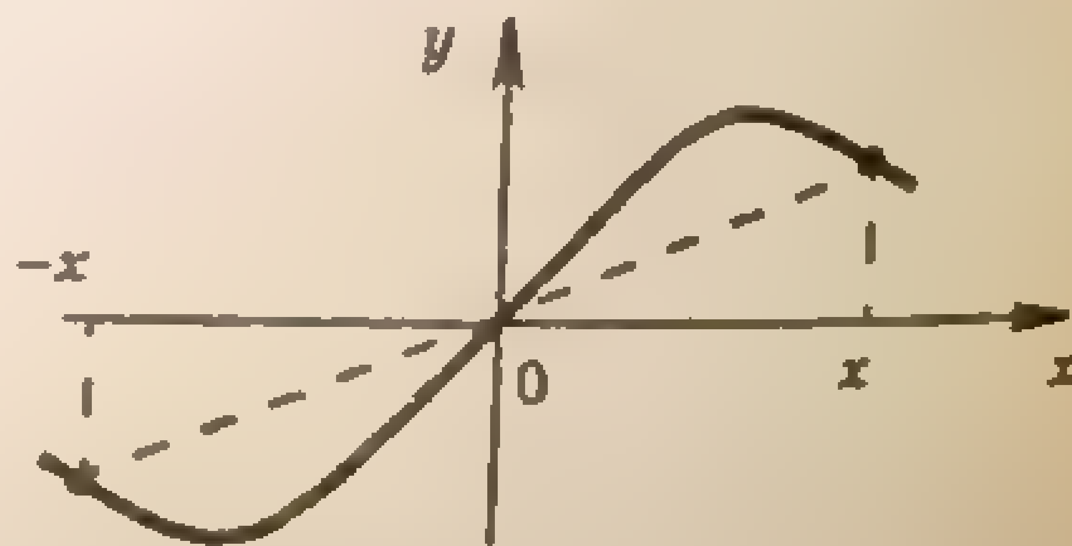
Таблица 20. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Область определения функции $D(f)$ — множество значений x, при которых функция определена.

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $D(f) = R$	$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ $D(f) = \{x \mid x \neq 1\}$	$f(x) = \sqrt[4]{1-x}$ $D(f) = \{x \mid x \leqslant 1\}$
$f(x) = \sqrt{2x - x^2 - 1}$ $D(f) = \{1\}$	$f(x) = \lg x + \lg(-x)$ $D(f) = \varnothing$	

Область значений функции $E(f)$ — множество значений, которые может принимать $f(x)$ при $x \in D(f)$. (Все значения a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решения.)

$f(x) = x^3 - 3x$ $E(f) = R$	$f(x) = 1 + \frac{1}{x^3}$ $E(f) = \{y \mid y \neq 1\}$	$f(x) = \sqrt[3]{2x - x^2}$ $E(f) = \{y \mid y \leqslant 1\}$
$f(x) = 1 + \sqrt{4x - x^2 - 4}$ $E(f) = \{1\}$	$f(x) = \sin x + \cos x$ $E(f) = \{y \mid -\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}\}$	

Четность	**Нечетность**
$f(-x) = f(x),\ x \in D(f)$	$f(-x) = -f(x),\ x \in D(f)$
График четной функции симметричен относительно оси ординат.	График нечетной функции симметричен относительно начала координат.
	
Примеры четных функций $f(x) = x^4 - 21x^2$ $g(x) = 5^x + 5^{-x}$ $\varphi(x) = \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}$	*Примеры* нечетных функций $h(x) = x^3 - 20x$ $u(x) = 5^x - 5^{-x}$ $v(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$

$f(x) = \sin x - \cos x$ не обладает четностью или нечетностью.

Периодичность

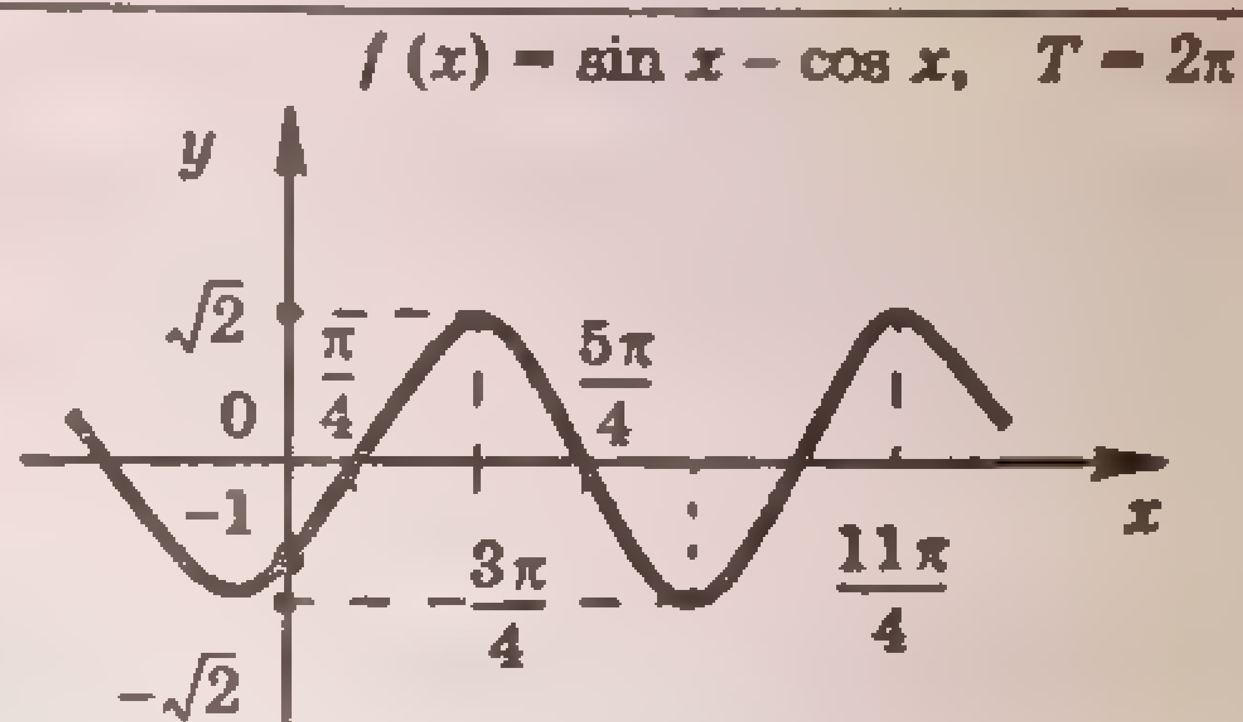
$$f(x-t)=f(x+t)=f(x),\ x\in D(f),\ t\neq 0$$

Число t называется *периодом функции*, а наименьшее положительное значение t *основным периодом функции* (T).

$f(x)=\sin 4x$ $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$	$f(x)=\cos 2\pi x$ $T=\frac{2\pi}{2\pi}=1$	$f(x)=2\cdot \mathrm{tg}\,\frac{x}{3}$ $T=\frac{\pi}{1/3}=3\pi$	$f(x)=17$ $t\in(0;\ +\infty)$ основного периода нет

$f(x)=x+\sin x$; $f(x)=\cos(x^2)$ — непериодические функции.

График периодической функции состоит из повторяющихся фрагментов на отрезке длины T; на любом таком отрезке периодическая функция принимает все свои значения.



Корень (нуль) функции —

значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

$f(x)=4x-\frac{1}{x}$ корни: $x=\pm\frac{1}{2}$	$f(x)=x\cdot\sqrt{1-x}$ корни: $x=0$; $x=1$	$f(x)=(1+x)\cdot\sqrt{x}$ корень: $x=0$

$f(x)=\sin x+\cos x$ корни: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$	$f(x)=\frac{1}{\sin x}$ корней нет

Промежуток знакопостоянства —

промежуток, на котором все значения функции положительны (или отрицательны), а на любом его расширении нет.

Примеры

$f(x)=3x^2+5x-8$; $f(x)<0$ при $x\in\left(-\frac{8}{3};\ 1\right)$;

$f(x)>0$ при $x\in\left(-\infty;\ -\frac{8}{3}\right)\cup(1;\ +\infty)$.

$f(x)=x^{-2}$; два промежутка знакопостоянства $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$, на обоих функция положительна.

Таблица 20. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Монотонность

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке I, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. **Промежуток I называется *промежутком возрастания* функции $f(x)$, если на этом промежутке функция возрастает, а на любом его расширении нет.**	**Функция $f(x)$ называется *убывающей* на промежутке I, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка** $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. **Промежуток I называется *промежутком убывания* функции $f(x)$, если на этом промежутке функция убывает, а на любом его расширении нет.**

Промежутки возрастания и убывания называются *промежутками монотонности* функции.

Критерий монотонности функции

$f(x)$ возрастает на промежутке, если $f'(x) > 0$.	$f(x)$ убывает на промежутке, если $f'(x) < 0$.

Примеры

$f(x) = 3x^2 + 5x - 8$; $f'(x) = 6x + 5$;

$f'(x) > 0$ при $x > -\frac{5}{6}$; $f(x)$ возрастает на промежутке $\left[-\frac{5}{6};\ +\infty\right)$;

$f'(x) < 0$ при $x < -\frac{5}{6}$; $f(x)$ убывает на промежутке $\left(-\infty;\ -\frac{5}{6}\right]$.

$f(x) = -\frac{1}{x^3}$; два промежутка монотонности $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$; на обоих функция возрастает.

$f(x) = 3x + 4$ возрастает на R, один промежуток монотонности $(-\infty;\ +\infty)$.

$f(x) = 3x^2 + 6x - 8$; $f'(x) = 6(x + 1) = 0$ при $x = -1$;
$f'(-2) < 0 \Rightarrow f(x)$ убывает на $(-\infty;\ -1]$;
$f'(0) > 0 \Rightarrow f(x)$ возрастает на $[-1;\ +\infty)$;
$x_0 = -1$ — точка минимума; $f(-1) = -11$ — минимум.

$f(x) = x^3$ — экстремумов нет.

Исследование функции при помощи производной. Построение графика

Найдите $D(f)$.
Найдите производную, критические точки, исследуйте знаки производной.
Найдите промежутки монотонности, точки экстремума, определите вид точек экстремума.
Найдите экстремумы функции.
Исследуйте функцию на четность, нечетность, периодичность (периодическую функцию лучше исследовать на промежутке длины T).
«Набросайте» эскиз графика.
Найдите $E(f)$.
Найдите несколько значений функции (по крайней мере по одному в каждом промежутке монотонности).

По возможности
Исследуйте поведение функции на концах области определения и в точках разрывов.
Найдите горизонтальные и вертикальные асимптоты.
Найдите корни и промежутки знакопостоянства функции.

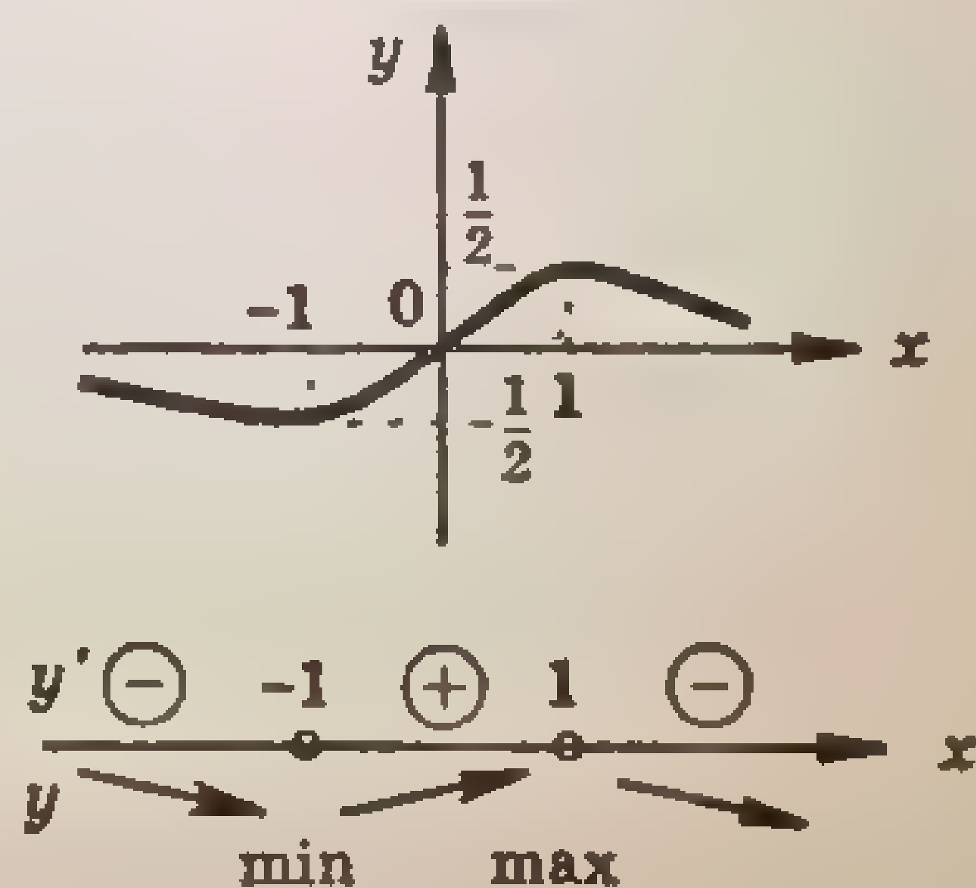
Постройте график функции

Пример: $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

$D(y) = R$.

$$y' = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};$$

y' существует при $x \in R$;
$y' = 0$ при $x = \pm 1$.



$y_{min} = y(-1) = -\dfrac{1}{2}$; $y_{max} = y(1) = \dfrac{1}{2}$.

Функция нечетная: $y(-x) = -y(x)$.

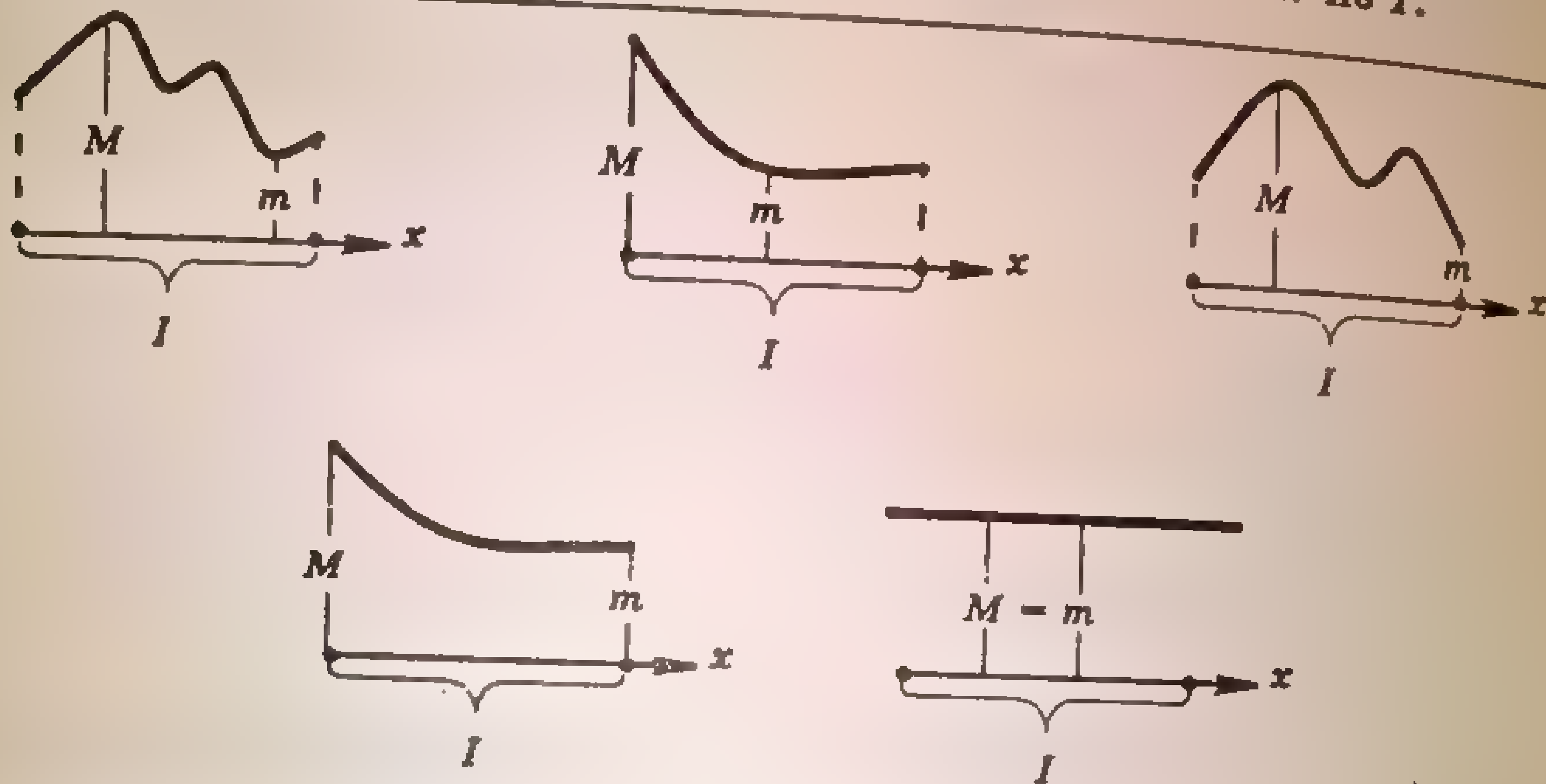
$E(y) = \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0.$$

$y = 0$ — горизонтальная асимптота; вертикальных асимптот нет.
$y = 0$ при $x = 0$ (корень),
$y > 0$ при $x > 0$;
$y < 0$ при $x < 0$.

Таблица 21. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ПРОМЕЖУТКЕ

Наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x)$ на I называется такое число M (m), что существует $x_0 \in I$ такое, что $f(x_0) = M$ $(f(x_0) = m)$, $M \geqslant f(x)$ $(m \leqslant f(x))$ для всех x из I.



Наибольшее и наименьшее значения непрерывная на I функция может принимать либо на концах промежутка (если это числа), либо в критических точках, лежащих внутри промежутка.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего на $[a; b]$ значений функции, непрерывной на $[a; b]$.

1) Найдите $f(a)$ и $f(b)$ — значения функции на концах промежутка.
2) Найдите критические точки функции внутри промежутка (т.е. на $(a; b)$).
3) Найдите значения функции в критических точках.
4) Из всех найденных значений выберите наибольшее и наименьшее; они и будут наибольшим и наименьшим значением функции на $[a; b]$.

Пример

$f(x) = 8x^2 - x^4$, $x \in [-1; 3]$.

$f(-1) = 7$; $f(3) = -9$;

$f'(x) = 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 2;\ x = -2 \notin [-1; 3]$.

$f(0) = 0$; $f(2) = 16$.

$\max\{7; -9; 0; 16\} = 16 \quad \Rightarrow \quad \max\limits_{[-1;\,3]} f(x) = 16;$

$\min\{7; -9; 0; 16\} = -9 \quad \Rightarrow \quad \min\limits_{[-1;\,3]} f(x) = -9.$

Пример

Если непрерывная функция имеет на промежутке I единственную точку экстремума и этот экстремум максимум (минимум), то в этой точке достигается наибольшее (наименьшее) значение функции.

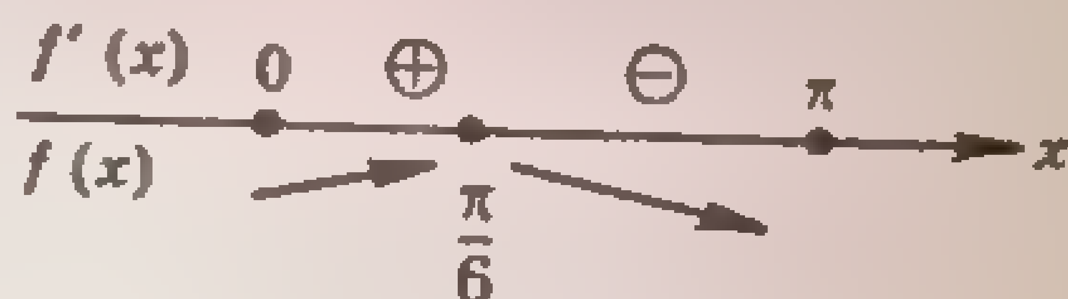
$f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x,\ x \in [0; \pi].$

$f(0) = \sqrt{3}$; $f(\pi) = -\sqrt{3}$; $f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$; $f'(x) = 0$ при

$\cos x = \sqrt{3}\sin x \Rightarrow \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k \in [0; \pi]$ при $k = 0$.

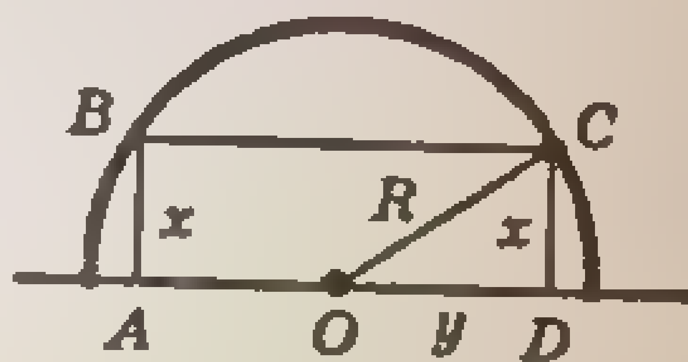
$\max\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6} = 2;$

$\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f(\pi) = -\sqrt{3}$



Задача

В полукруг радиуса R вписать прямоугольник наибольшей площади так, чтобы одна его сторона лежала на диаметре полукруга, а две вершины — на дуге полукруга.



Обозначим стороны прямоугольника $AB = x$, $AD = 2y$.

Тогда его площадь $S = 2xy$. Заметив, что $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, получим

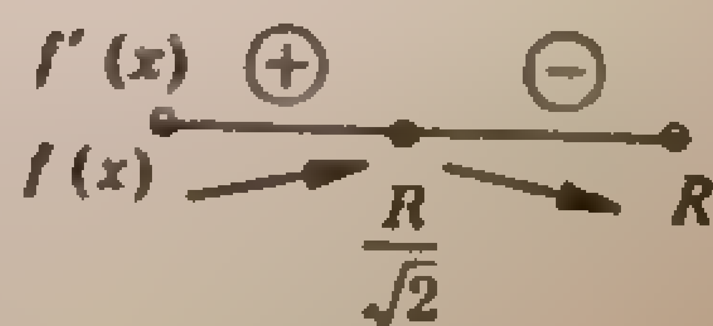
$S = 2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} = 2 \cdot \sqrt{R^2x^2 - x^4}$, $x \in (0; R)$.

Исследуем на максимум функцию $f(x) = R^2x^2 - x^4$ при $x \in (0; R)$.

$f'(x) = 2R^2x - 4x^3 = 2x(R^2 - 2x^2)$. $f'(x) = 0$ при $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

(так как $x \in (0; R)$).

Следовательно, при $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ площадь прямоугольника наибольшая.



Ответ. Прямоугольник имеет наибольшую площадь, если его стороны $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, $2y = R\sqrt{2}$.

Таблица 22. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на промежутке I, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ одна из первообразных функции $f(x)$ на I, то любая первообразная функции $f(x)$ на этом промежутке имеет вид $F(x) + C$, где $C \in R$.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается $\int f(x)dx$.

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — любая первообразная $f(x)$, а $C \in R$.

Свойства первообразных

Первообразная $f'(x)$ равна $f(x) + C$.

Если первообразная $f(x)$ равна $F(x)$, то первообразная $f(t)$ равна $F(t)$.

Если первообразная $f(x)$ равна $F(x)$, то первообразная $kf(x)$ равна $kF(x)$.

Пусть первообразная $f_1(x)$ равна $F_1(x)$, первообразная $f_2(x)$ равна $F_2(x)$, тогда первообразная $f_1(x) + f_2(x)$ равна $F_1(x) + F_2(x)$.

Пусть первообразная $f(x)$ равна $F(x)$, тогда первообразная $f(kx + p)$ равна $\frac{1}{k}F(kx + p)$.

Для того чтобы доказать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на промежутке I, нужно показать, что для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$ (т.е. воспользоваться определением).

Задачи

Доказать, что функция $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x$ является первообразной для функции $f(x) = 1 + \cos 2x$ на R.

$F'(x) = \frac{1}{2}\cos 2x \cdot 2 + 1 = 1 + \cos 2x = f(x)$.

Полученное равенство верно для всех действительных значений x.

Найти первообразную функции $f(x) = 3x^2 - 1$, график которой проходит через точку $M(1; -1)$.

Любая первообразная функции $f(x) = 3x^2 - 1$ имеет вид $F(x) = x^3 - x + C$. График искомой первообразной пройдет через точку $M(1; -1)$, если $F(1) = -1$, т. е. $1^3 - 1 + C = -1 \Rightarrow C = -1$.

Ответ. $F(x) = x^3 - x - 1$.

Найти первообразную функции $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$.

Преобразуем $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x$.

Первообразная суммы равна сумме первообразных. Следовательно, первообразная $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$, где C — произвольная постоянная.

Найти неопределенный интеграл $\int \sin 3x \cdot \cos x\, dx$.

$\int \sin 3x \cdot \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int(\sin 4x + \sin 2x)\, dx = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot\cos 4x + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos 2x\right) = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

Найти первообразную для функции $f(x) = \frac{1}{4x^2 - 1}$.

Преобразуем $f(x) = \frac{1}{4x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{2x + 1}\right)$.

Следовательно, первообразная

$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln|2x - 1| - \frac{1}{2}\ln|2x + 1|\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x - 1}{2x + 1}\right| + C.$

Таблица первообразных

$f(x)$	$F(x)$	Промежуток I
k	$kx + C$	R
x^{α} $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \in N,\ x \in R$; $-\alpha \in N,\ x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $\alpha \notin Z,\ x \in (0; +\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$(-\infty; 0)$ или $(0; +\infty)$
e^x	$e^x + C$	R
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	R
$\cos x$	$\sin x + C$	R
$\sin x$	$-\cos x + C$	R
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$(\pi k;\ \pi + \pi k),\ k \in Z$

Таблица 23. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I числовой оси, содержащем точки $x = a$ и $x = b$, то разность значений $F(b) - F(a)$ (где $F(x)$ — первообразная $f(x)$ на I) называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ от a до b:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Определенный интеграл есть число.

Основные свойства

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, если a, b и c — любые точки промежутка I непрерывности $f(x)$

$$\int_a^b kf(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

Дополнительные свойства

$$\int_a^b f(px+q)dx = \frac{1}{p}\int_{pa+q}^{pb+q} f(t)dt$$

Если $f(x)$ четная, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_0^a f(x)dx.$

Если $f(x)$ нечетная, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

Примеры

$$\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 (x^{1/2}+x^{-1/2})dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{x^{1/2}}{1/2}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3}(4^{3/2}-1) +$$

$$+ 2(4^{1/2}-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 + 2\cdot 1 = \frac{20}{3}$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(3x+4)^2} = \frac{1}{3}\cdot\int_{3\cdot(-1)+4}^{3\cdot 2+4} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}\Bigg|_1^{10} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{90}$$

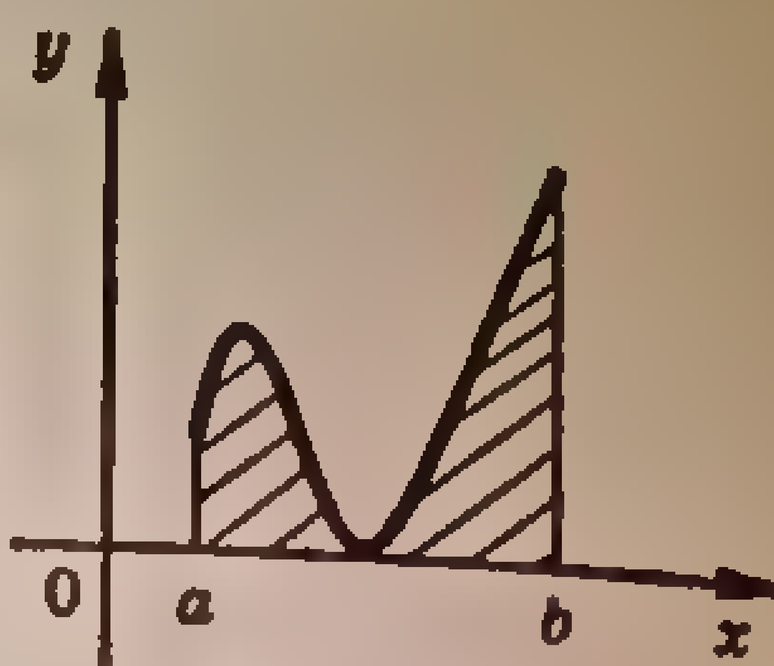
$3x + 4 = t$

$$\int_0^1 \frac{25^x+5^{x+1}}{10^{x-1}}dx = \int_0^1\left(\frac{25}{10}\right)^x\cdot 10dx + \int_0^1\left(\frac{5}{10}\right)^x\cdot 50dx = 10\int_0^1 2{,}5^x dx +$$

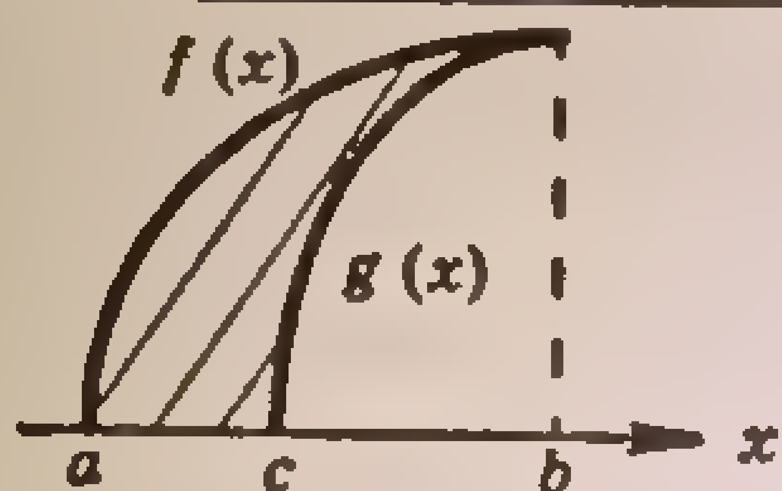
$$+ 50\int_0^1 0{,}5^x dx = 10\cdot\frac{2{,}5^x}{\ln\ 2{,}5}\Bigg|_0^1 + 50\cdot\frac{0{,}5^x}{\ln\ 0{,}5}\Bigg|_0^1 = \frac{15}{\ln\ 2{,}5} + \frac{25}{\ln\ 2}$$

Площадь криволинейной трапеции

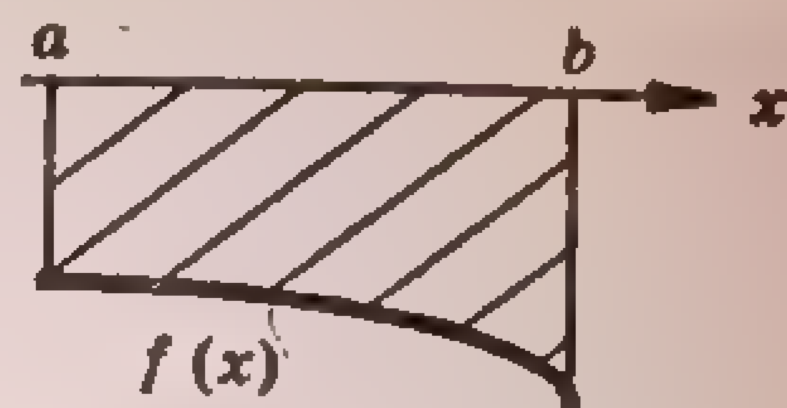
Фигура, ограниченная прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$ и графиком непрерывной и неотрицательной на $[a; b]$ функции $f(x)$, называется *криволинейной трапецией*. Площадь криволинейной трапеции $S = \int_a^b f(x)dx$



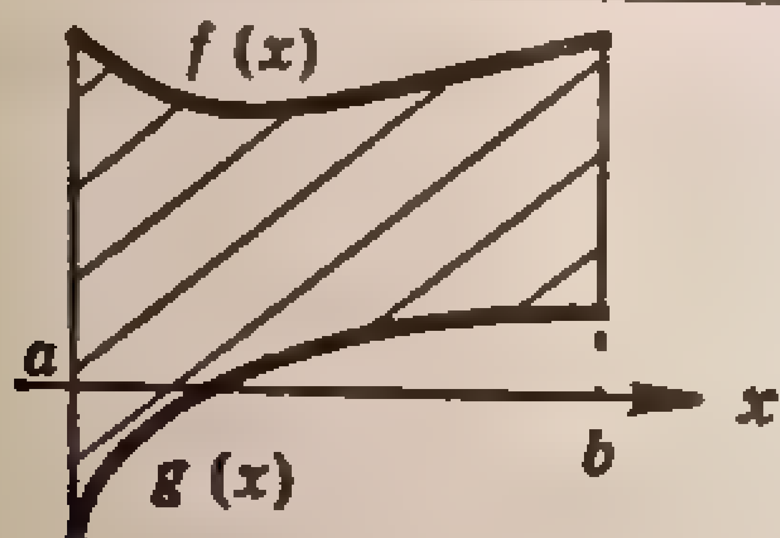
Вычисление площадей



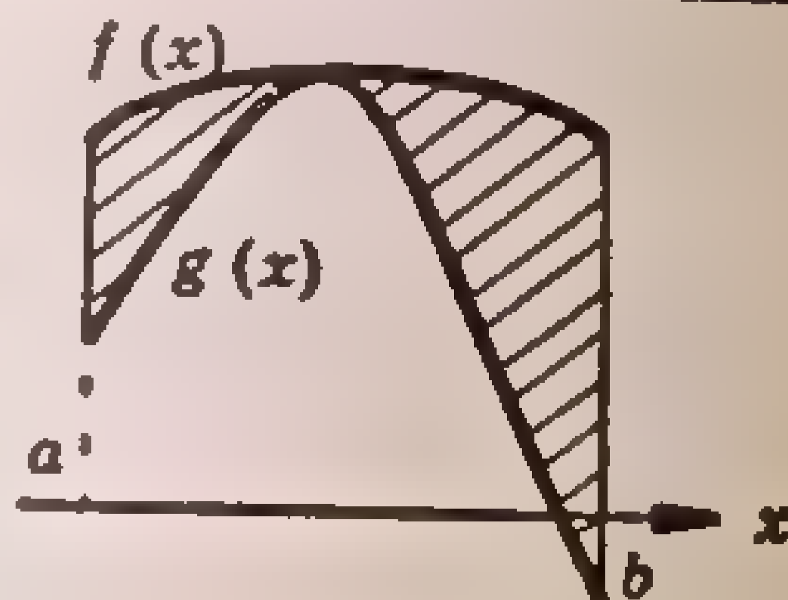
$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b g(x)dx$$



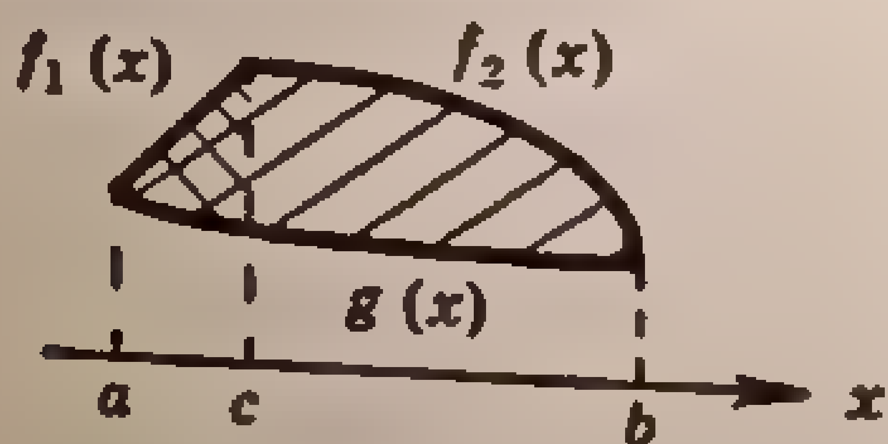
$$S = -\int_a^b f(x)dx$$



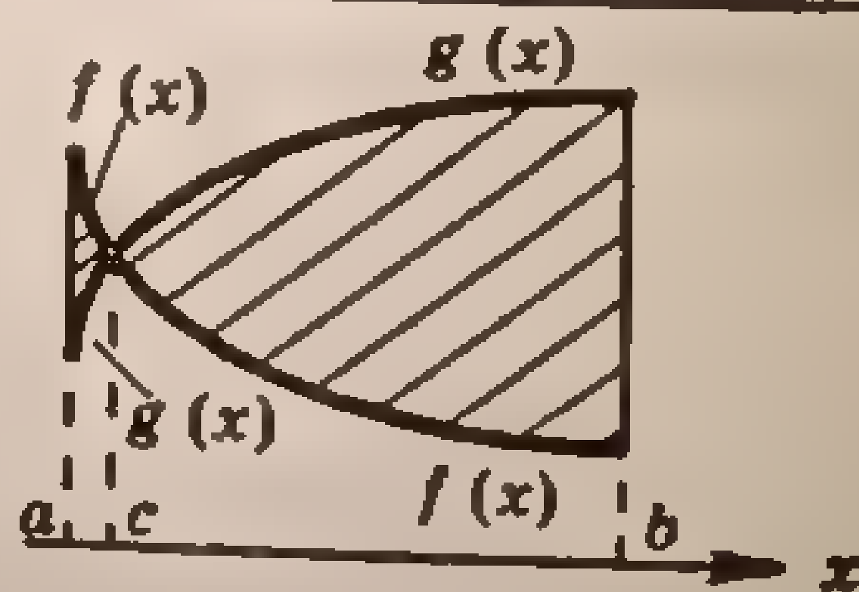
$f(x) \geqslant g(x)$ на $[a, b]$



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



$$S = \int_a^c (f_1(x) - g(x))dx + \int_c^b (f_2(x) - g(x))dx$$



$$S = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

Вычисление объемов тел вращения

Криволинейная трапеция (вокруг оси Ox)	$f(x)$	$V_{ox} = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$
Конус	$y = \frac{R}{H}x$	$V_{к} = \pi \int\limits_0^H \left(\frac{Rx}{H}\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big\|_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$
Шар	$y = \sqrt{R^2 - x^2}$	$V_{ш} = \pi \int\limits_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = 2\pi \int\limits_0^R (R^2 - x^2)dx = 2\pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big\|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$

Путь, пройденный материальной точкой за время $t_2 - t_1$ ($t_2 > t_1$) при прямолинейном движении со скоростью $v(t)$, равен:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Предметный указатель

ПРИЛОЖЕНИЕ

Простые числа от 2 до 997

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Квадраты натуральных чисел от 11 до 99

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Факториалы и степени

n	$n!$	2^n	3^n	5^n
0	1	1	1	1
1	1	2	3	5
2	2	4	9	25
3	6	8	27	125
4	24	16	81	625
5	120	32	243	3125
6	720	64	729	15625
7	5040	132	2187	78125
8	40320	264	6561	390625
9	362880	512	19683	1953125
10	3628800	1024	59049	9765625

СОДЕРЖАНИЕ




ISBN 5-7107-1690-1
9 785710 716908



PHOTOS BY ANDREY G AKA DONUT190